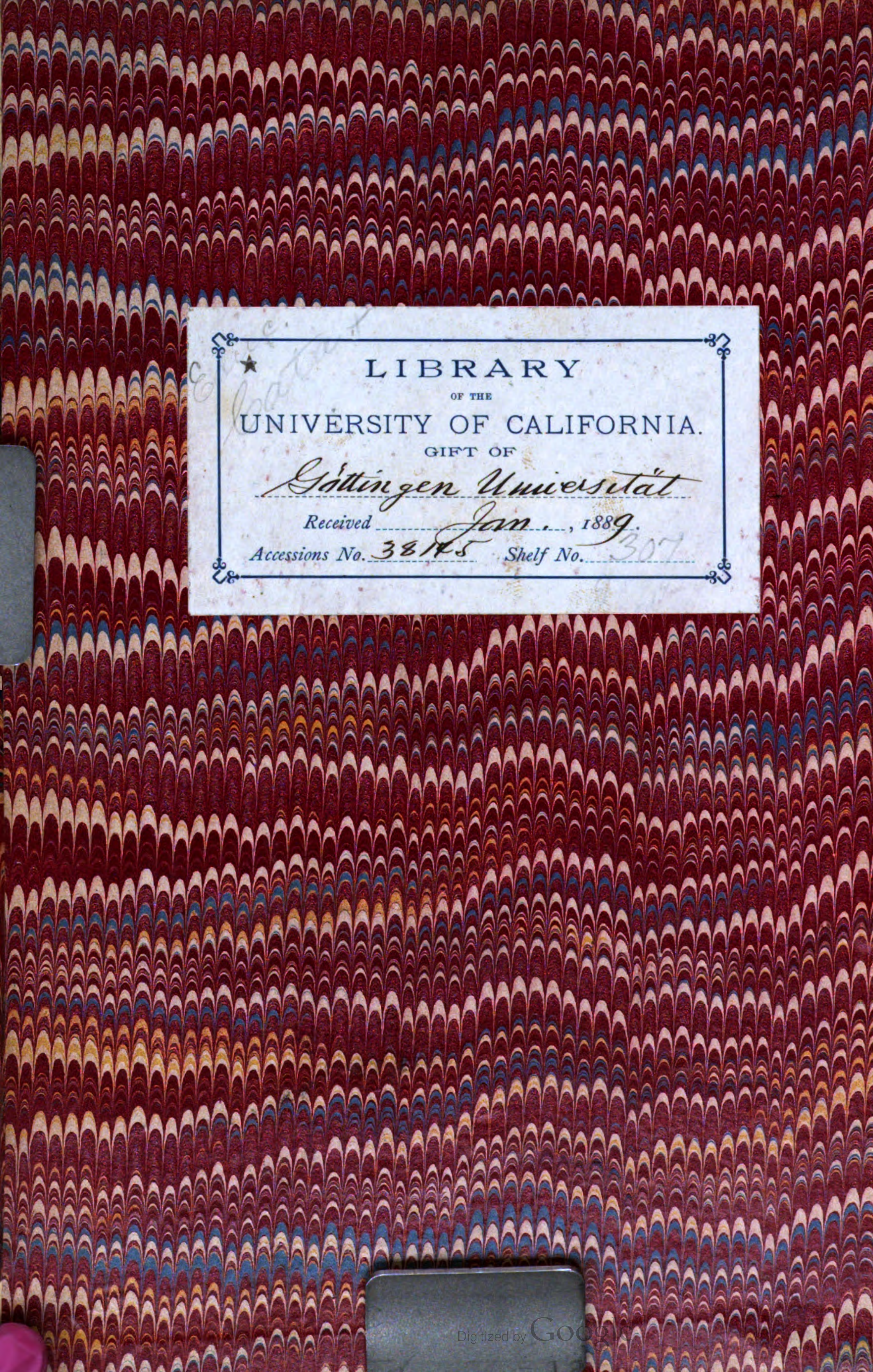




LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
Göttingen Universität
Received Jan., 1889.
Accessions No. 38145 Shelf No.



# Bestimmung

einer

# speciellen periodischen Minimalfläche,

auf welcher

unendlich viele gerade Linien

und

unendlich viele ebene geodätische Linien

liegen.

---

**Inaugural-Dissertation**

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

philosophischen Facultät

der

Georg-Augusts-Universität zu Göttingen

vorgelegt

von

**Felix Bohnert**

aus Hamburg.



---

Göttingen,

Druck der Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kästner.

1888.

Seinen lieben Eltern

in

dankbarer Verehrung

gewidmet

vom

Verfasser.

# Inhaltsangabe.

2) Nachweis, dass bei geeigneter Wahl der zur Verfügung stehenden Parameter die Geraden und die Ebenen, welche die Begrenzung des durch die gefundenen Gleichungen analytisch dargestellten Minimalflächenstückes $M$ bilden, jede mit den gestellten Bedingungen verträgliche Lage zu einander annehmen können.

**Cap. IV.** Untersuchung des Flächenstückes $M$ und seiner analytischen Fortsetzung.

1) Betrachtung eines Flächenstückes $M_8$ der zu der gefundenen Function $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden Minimalfläche, welches aus vier zu dem Flächenstücke $M$ congruenten und vier zu demselben symmetrischen Flächenstücken besteht.

2) Nachweis, dass die Gestalt des dem Flächenstücke $M$ entsprechenden Bereiches $\Sigma$ nur von dem einen der beiden Parameter abhängt. Folgerungen aus diesem Satze.

3) Untersuchung der Periodicität der durch analytische Fortsetzung des Flächenstückes $M$ entstehenden Fläche. Nachweis, dass die durch congruente und symmetrische Wiederholungen des Minimalflächenstückes $M$ entstehende Minimalfläche im Allgemeinen die Eigenschaft hat, dass in einen endlichen Theil des Raumes eine unendliche Anzahl von Wiederholungen des Flächenstückes $M$ eintritt.

**Cap. V.** Erörterung einiger einfacher Fälle, welche sich durch specielle Verfügung über die Werthe der Parameter $\mathfrak{r}$ und $\Phi$ der Function $\mathfrak{F}(s)$ ergeben.

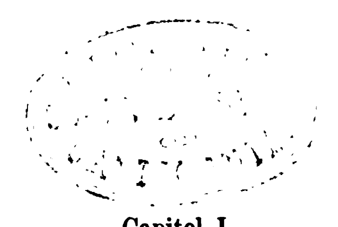
1) Betrachtung der Fälle, für welche $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$, $\Phi = 0$ und $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$, $\Phi = \frac{1}{4}\pi$ ist.

2) Betrachtung der Fälle, für welche $\mathfrak{r} = 1$, $\Phi = 0$ und $\mathfrak{r} = 1$, $\Phi = \frac{1}{4}\pi$ ist.

3) Betrachtung des Falles, für welchen $\mathfrak{r} = 1$, $\Phi = \Phi$ ist.

4) Betrachtung der Fälle, für welche $\mathfrak{r} = 0$, $\Phi = \Phi$ und $\mathfrak{r} = \infty$, $\Phi = \Phi$ ist.

**Cap. VI.** Nachweis, dass das Flächenstück $M$ das kleinste, einfach zusammenhängende Flächenstück ist, welches längs ebener Curven in zwei gegebenen parallelen Ebenen endigt und dessen vollständige Begrenzung von diesen und zwei gegebenen parallelen Geraden gebildet wird, welche gegen die Ebenen unter Winkeln von 45° geneigt sind.



## Capitel I.

# Einleitung.

### 1.

### Zusammenhang der Aufgabe mit einer ähnlichen, 1816 von Gergonne gestellten Aufgabe, deren Lösung sich aus der Lehre von den Minimalflächen ergiebt.

Im Jahre 1816 hat Gergonne im 7. Bande seiner „Annales de Mathématiques“ die Aufgabe gestellt:

> „Couper un cube en deux parties, de telle manière, que la section vienne se terminer aux diagonales inverses de deux faces opposées, et que l'aire de cette section, terminée à la surface du cube, soit un minimum“.
>
> „Donner, en outre, l'équation de la courbe, suivant laquelle la surface coupante coupe chacune des autres faces de ce cube“.

Bis zum Jahre 1872 ist keine richtige Lösung dieser Aufgabe veröffentlicht worden. In diesem Jahre hat Herr H. A. Schwarz in einer Abhandlung „Fortgesetzte Untersuchungen über Minimalflächen“ (Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1872) hervorgehoben, dass ein Flächenstück, welches den Bedingungen der Aufgabe genügen soll, nicht nur in jedem seiner Punkte die mittlere Krümmung Null haben muss, sondern auch diejenigen, dasselbe begrenzenden Seitenflächen des Würfels, auf denen seine Begrenzung nicht durch vorgeschriebene Linien gegeben ist, senkrecht treffen muss. In der angeführten Abhandlung behandelt Herr H. A. Schwarz demnach die Aufgabe: Ein einfach zusammenhängendes, in seinem Innern von singulären Stellen freies Minimalflächenstück $M$ zu bestimmen, welches zwischen den Ebenen zweier gegenüberliegender Seitenflächen eines gegebenen Würfels liegt, diese Ebenen rechtwinklig trifft, und dessen vollständige Begren-

zung, abgesehen von den in diesen Ebenen liegenden Theilen derselben, von den nicht parallelen Diagonalen eines anderen Paares gegenüberliegender Seitenflächen des Würfels gebildet wird. Diese Aufgabe ist ein specieller Fall der allgemeineren, von Herrn H. A. Schwarz a. a. O. gestellten Aufgabe:

> „Gegeben ist eine zusammenhängende, geschlossene Kette, deren Glieder . . . . . . von geradlinigen Strecken und von Ebenen gebildet werden; gesucht wird ein einfach zusammenhängendes, in seinem Innern von singulären Stellen freies Minimalflächenstück, welches von den geradlinigen und den ebenen Gliedern der Kette begrenzt wird und die letzteren rechtwinklig trifft“.

Eine andere Aufgabe, welche in dieser allgemeineren als specieller Fall enthalten ist, und deren Lösung in der vorliegenden Arbeit versucht werden soll, erhält man, wenn man den Würfel durch ein schiefwinkliges Parallelepiped ersetzt, und an Stelle der nicht parallelen Diagonalen zweier gegenüberliegenden Seitenflächen desselben die parallelen Diagonalen derselben als begrenzende Glieder in die Kette einführt. Dabei kann die Bedingung, dass die beiden geradlinigen Glieder der Kette gegen die ebenen Glieder derselben unter Winkeln von $45^0$ geneigt sind, aufrecht erhalten oder aufgehoben werden. Bei der in dieser Abhandlung behandelten Aufgabe soll ersteres geschehen.

## 2.

## Genaue Formulirung der zu behandelnden Aufgabe. Angabe der bei der Behandlung dieser Aufgabe benutzten Literatur.

Die im Folgenden zu behandelnde Aufgabe möge die Fassung erhalten:

Es wird ein einfach zusammenhängendes, ganz im Endlichen liegendes, von Punktsingularitäten freies Minimalflächenstück $M$ gesucht, welches zwischen zwei zu einander parallelen Ebenen liegt, dieselben rechtwinklig trifft, und längs zweier zu einander parallelen, gegen die Ebenen unter Winkeln von $45^0$ geneigten Geraden endigt. Die vollständige Begrenzung des gesuchten Flächenstückes $M$ soll demnach ausser von den beiden Geraden von zwei in den erwähnten beiden Ebenen liegenden Krümmungslinien gebildet werden, welche zugleich geodätische Linien der Fläche sind.

Die Lösung dieser Aufgabe kann, unter Zugrundelegung gewisser

in der Folge anzugebender Voraussetzungen über die Beschaffenheit des gesuchten Minimalflächenstückes mit verhältnismässig einfachen Hülfsmitteln gewonnen werden. Die Verträglichkeit der zu machenden Voraussetzungen mit den übrigen Bedingungen der Aufgabe wird hierbei nachträglich zu rechtfertigen sein.

Man gelangt zu der Lösung der Aufgabe durch eine Anwendung der Resultate derjenigen Untersuchungen über Minimalflächen, welche Herr K. Weierstrass und Herr H. A. Schwarz unter nachfolgenden Titeln veröffentlicht haben.

K. Weierstrass: Ueber die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. (Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866).

H. A. Schwarz: Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 80).

Der Inhalt dieser beiden Schriften wird im Folgenden als bekannt vorausgesetzt werden. Dieselben sollen, der Bequemlichkeit wegen, wo sie citirt werden, mit den Abkürzungen „Monatsber. 1866" und „Miscellen" angeführt werden.

Ausserdem werden Ergebnisse aus den folgenden Arbeiten:

H. A. Schwarz: Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Eine von der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 4. Juli 1867 gekrönte Preisschrift. Berlin 1871.

H. A. Schwarz: Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen. Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Berlin 1872.

H. A. Schwarz: Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung. Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Karl Weierstrass.
Acta Societatis Scientiarum Fennicae. Tom. XV.

E. R. Neovius: Untersuchung einiger Singularitäten, welche im Innern und auf der Begrenzung von Minimalflächenstücken auftreten können, deren Begrenzung von geradlinigen Strecken gebildet wird. Acta Societatis Scientiarum Fennicae. Tom. XVI.

benutzt werden, und es sollen dementsprechend an den betreffenden Stellen diese Abhandlungen beziehungsweise durch die Abkürzungen „Preisschrift", „Fortges. Untersuch.", „Festschrift", „Sing. v. Min. fl." angeführt werden.

---

## Capitel II.

# Bestimmung der Function $\mathfrak{F}(s)$ für die gesuchte Minimalfläche.

### 1.

### Darstellung des Gedankenganges, durch welchen die gestellte Aufgabe gelöst wird.

Die Lösung der gestellten Aufgabe beruht auf der Betrachtung zweier ausgezeichneter conformer Abbildungen des gesuchten Minimalflächenstückes $M$.

Die erste derselben ist die conforme Abbildung des zu bestimmenden Minimalflächenstückes $M$ auf einen ebenen Bereich $S$. Derselbe entsteht so, dass man durch parallele Normalen das Minimalflächenstück auf einen sphärischen Bereich $K$ der Kugel vom Radius 1 abbildet, und von diesem Bereiche durch eine stereographische Projection zu einem ebenen Bereiche, dem Bereiche $S$, übergeht.

Die zweite dieser Abbildungen ist die auf einen ebenen Bereich $\Sigma$, bei welcher den beiden Schaaren von Krümmungslinien und folglich auch den beiden Schaaren von Asymptotenlinien je zwei Schaaren von parallelen Geraden entsprechen.

Die complexen Grössen, welche durch einen Punkt des Bereiches $S$ und einen Punkt des Bereiches $\Sigma$ geometrisch dargestellt werden, mögen beziehlich mit $s = \xi + \eta i$ und $\sigma = p + qi$ bezeichnet werden.

Der Bereich $\Sigma$ ist nach dem Gesagten eine conforme Abbildung des Bereiches $S$, und es existirt die in den „Miscellen" hergeleitete Beziehung

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2,$$

in welcher $\mathfrak{F}(s)$ die Function des complexen Argumentes $s$ bedeutet, welche in dem „Monatsber. 1866" angegebenen Sinne zu dem gesuchten Minimalflächenstücke $M$ gehört.

Nach dem Bemerkten müssen zum Zwecke der analytischen Bestimmung des Minimalflächenstückes $M$ die demselben entsprechenden ebenen Bereiche $S$ und $\Sigma$ aufgesucht und conform auf einander abgebildet werden.

Durch die Function $\mathfrak{F}(s)$ sind die Ausdrücke für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des gesuchten Flächenstückes $M$ in der „Monatsber. 1866" dargestellten Weise bestimmt. Die Durchführung des hier angedeuteten Gedankenganges zur Lösung der gestellten Aufgabe wird im Folgenden gegeben.

## 2.

### Zu Grunde gelegte Voraussetzungen.

Für die geschlossene Kette von Ebenen und Geraden, welche die Begrenzung des gesuchten Flächenstückes $M$ bilden, giebt es einen Mittelpunkt $G$ (vergl. Fig. 3). In Bezug auf diesen sind je zwei Punkte der Glieder dieser Kette derart einander zugeordnet, dass sie auf einem und demselben durch den Punkt $G$ gehenden Strahle, auf entgegengesetzten Seiten des Punktes $G$ in gleicher Entfernung von demselben liegen. Dieser Punkt $G$ kann aufgefasst werden als der Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms, von dem zwei parallele Seiten nach Grösse und Richtung durch die Abschnitte der das Flächenstück begrenzenden Geraden zwischen den dasselbe begrenzenden Ebenen gebildet werden. Es soll vorausgesetzt werden, dass es ein den gestellten Bedingungen genügendes Minimalflächenstück $M$ giebt, auf welchem der Punkt $G$ selbst liegt, und für welches dieser Punkt im erklärten Sinne die Bedeutung eines Mittelpunktes hat.

Des Weiteren soll angenommen werden, dass im Allgemeinen die Winkel, welche die von je einer Ecke ausgehenden Elemente der Randlinie des Flächenstückes einschliessen, $45^0$ und nicht, wie das an sich möglich wäre, $135^0$ betragen.

Es soll ferner die Annahme gemacht werden, dass die Normale der Fläche ihre Richtung stetig in der Nähe jedes zu dem Flächenstücke $M$ gehörenden Punktes ändert.

Die Begrenzung des Flächenstückes $M$ zerfällt in vier Theile; zwei derselben sind die gegebenen Geraden, die beiden andern sind die beiden ebenen Krümmungslinien, längs welcher das Flächenstück auf den gegebenen beiden parallelen Ebenen endigt. Es wird angenommen, dass die Normale der Fläche längs jedes Theiles der Begrenzung ihre Richtung stets in demselben Sinne ändert und längs keines solchen Theiles eine Richtung mehr als ein Mal annimmt. Man kann nämlich von einem bestimmten Sinne der Richtungsänderung der Normalen längs jedes Theiles der Begrenzung deshalb reden, weil die Normale in allen Punkten eines solchen derselben Ebene parallel bleibt.

Aus der Gestalt eines Flächenstückes, welches durch analytische Fortsetzung des Flächenstückes $M$ entsteht, lässt sich in der „Sing. v. Min. fl." p. 5—9 angegebenen Weise erschliessen, dass die Eckpunkte des Flächenstückes $M$ zu der Gruppe der von Singularitäten freien Punkte auf Minimalflächen gehören, welche a. a. O. (p. 9

unten) erwähnt wird. Um aber im Anfange der Abhandlung ein Eingehen auf die Gestalt der analytischen Fortsetzung des Flächenstückes $M$ vermeiden zu können, soll endlich vorausgesetzt werden, dass es ein solches Minimalflächenstück $M$ giebt, welches allen übrigen Bedingungen genügt, und welches in der Nähe jeder Ecke mit allen seinen inneren Punkten ganz auf einer Seite der Tangentialebene der Fläche in der betrachteten Ecke liegt.

Die Verträglichkeit aller dieser Voraussetzungen mit den Bedingungen der Aufgabe ergiebt sich nachträglich aus der Lösung derselben. Es kann nämlich gezeigt werden, dass es im Allgemeinen ein Minimalflächenstück $M$ giebt, welches den Bedingungen der Aufgabe und den hier aufgezählten Voraussetzungen genügt. Allerdings wird dabei nicht darüber entschieden werden, ob alle hier gemachten Voraussetzungen nothwendige Voraussetzungen sind, und ob das mit ihrer Hülfe etwa bestimmbare Minimalflächenstück das einzige ist, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt. Eine Untersuchung, welche sich auf diese beiden Punkte erstreckte, würde über den Rahmen einer Arbeit hinausgehen, welche sich darauf beschränkt, ein neues Beispiel für die Möglichkeit der analytischen Bestimmung eines Minimalflächenstückes aus einer hinreichenden Anzahl von Bedingungen für seine Begrenzung mit einfachen Hülfsmitteln völlig durchzuführen.

## 3.

### Durch parallele Normalen vermittelte conforme Abbildung des Minimalflächenstückes $M$ auf einen sphärischen Bereich $K$ und stereographische Projection des letzteren von einem Punkte der Kugel aus auf einen ebenen Bereich $S$.

Wie schon bemerkt worden ist, trifft das Minimalflächenstück $M$ die zu einander parallelen Begrenzungsebenen desselben längs ebener Krümmungslinien, welche zugleich geodätische Linien der Fläche sind. Die Normalen der Fläche längs dieser Linien sind sämmtlich den erwähnten Begrenzungsebenen der Fläche parallel. Bei der conformen Abbildung durch parallele Normalen auf die Kugel vom Radius 1 entsprechen diesen Curven daher Bogen grösster Kreise.

Die Geraden, welche das Flächenstück $M$ begrenzen, sind Asymptotenlinien desselben. Denn jede Gerade, welche auf einer Fläche liegt, ist eine Asymptotenlinie derselben. Längs der erwähnten Geraden sind alle Normalen der Fläche einer Normalebene zu einer

dieser Geraden parallel. Auch diesen Geraden entsprechen daher bei der genannten conformen Abbildung Bogen grösster Kreise auf der Kugel. In jeder Ecke des Minimalflächenstückes bildet je eine der genannten Asymptotenlinien mit der Tangente je einer der genannten geodätischen Linien einen Winkel von 45°.

Aus diesen Bemerkungen und der gestellten Voraussetzung, dass längs jeder Begrenzungslinie des Flächenstückes $M$ die Normale ihre Richtung stetig ändert, sowie längs keiner derselben dieselbe Richtung mehr als ein Mal annimmt, geht hervor, dass in auf einander folgenden Ecken des Flächenstückes $M$ die Normalen desselben entgegengesetzte Richtung haben. Demnach entspricht einem einmaligen Umlaufe um die Begrenzung des Flächenstückes $M$ bei der conformen Abbildung desselben, welche durch parallele Normalen vermittelt wird, auf der Einheitskugel ein zweimaliger Umlauf um die Begrenzung eines Kugelzweiecks $K$, dessen Eckpunkte die Endpunkte eines Kugeldurchmessers sind, dessen Seiten die Hälften zweier grösster Kugelkreise sind, deren Ebenen gegen einander unter Winkeln von 45° geneigt sind.

In je zwei zum Punkte $G$ symmetrisch gelegenen Punkten des Flächenstückes $M$ sind die Normalen desselben gleichgerichtet und dadurch paarweise einander zugeordnet. Um also eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten des Flächenstückes $M$ und denen des betrachteten sphärischen Bereiches $K$ bei der Abbildung durch parallele Normalen zu erhalten, welche auch eindeutig umkehrbar ist, muss man den letzteren zweiblättrig annehmen. Da jedes Eckenelement des Flächenstückes $M$, wie vorausgesetzt ist, die innere Fläche eines Winkels von 45° erfüllt, so ist zu vermuthen, dass dem Inneren des Flächenstückes $M$ das Innere des zweiblättrig zu denkenden Kugelzweiecks $K$ entspricht, und es soll dementsprechend diese Annahme gemacht werden. Dem Punkte $G$ des Minimalflächenstückes entspricht auf der Kugelfläche ein Punkt $G_K$, welcher für den zweiblättrigen sphärischen Bereich $K$ ein Windungspunkt erster Ordnung ist.

Es soll der weiteren Betrachtung ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt werden, welches folgenden Bedingungen gemäss gewählt ist: Ein Eckpunkt des Flächenstückes $M$ soll die Coordinaten $x = y = z = 0$ haben. Die von diesem Eckpunkte ausgehende gerade Asymptotenlinie, welche zur Begrenzung des Flächenstückes $M$ gehört, soll durch die Gleichungen $x = -y$, $z = 0$ dargestellt sein. Die durch den erwähnten Eckpunkt gehende Begrenzungsebene des Flächenstückes $M$ soll die Gleichung $y = 0$ haben. Die $z$-Coordinate jedes Punktes der anderen, das Flächen-

stück $M$ begrenzenden geraden Asymptotenlinie soll positiven Werth haben. Die positive Richtung der Normalen in jedem Punkte der Fläche werde durch die Verfügung bestimmt, dass im Punkte $x = y = z = 0$ die Richtungscosinus derselben $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -1$ sind.

Die Kugel vom Radius 1, auf welche das Flächenstück $M$ durch parallele Normalen conform abgebildet wird, sei um den Punkt $x = y = z = 0$ als Mittelpunkt beschrieben. Es sollen der Bequemlichkeit halber folgende der mathematischen Geographie entlehnte Benennungen gebraucht werden: Die Schnittpunkte der positiven und der negativen $z$-Axe mit der Kugel sollen beziehlich als Nord- und Südpol derselben bezeichnet werden. Die Schnittlinie der Ebene $z = 0$ mit der Kugel stellt den Aequator derselben dar. Die Schnittlinie der Ebene $y = 0$ mit der Kugel bezeichne den Anfangsmeridian derselben. Die Zählung der Meridiane erfolge auf dem Aequator in der Richtung, welche auf kürzestem Wege von der positiven $x$-Axe zur positiven $y$-Axe führt.

Bei dieser Wahl des Coordinatensystemes und bei dieser Bezeichnungsweise bedeckt der vorher betrachtete zweiblättrige sphärische Bereich $K$ den Theil der Kugeloberfläche, welcher einerseits vom Anfangsmeridian, andrerseits von dem der Länge 45° entsprechenden Meridiane begrenzt wird. Durch stereographische Projection dieses Bereiches $K$ vom Nordpol auf die Aequatorebene der Kugel erhält man den ebenen Bereich, der gemäss einer früher getroffenen Bestimmung mit $S$ bezeichnet werden soll. (Fig. 1). Derselbe erstreckt sich über den als zweiblättrig anzunehmenden achten Theil der ins Unendliche erstreckten Aequatorebene der Kugel und ist von den Geraden $y = 0$, $z = 0$, und $y = x$, $z = 0$, ($x$ positiv) begrenzt. Die complexe Grösse, welche geometrisch durch einen Punkt dieses Bereiches dargestellt wird, nimmt innerhalb desselben alle Werthe $s = \xi + \eta i = r \cdot e^{\varphi i}$ an, für welche $0 \leqq r \gtreqless \infty$, $0 \leqq \varphi \gtreqless \frac{1}{4}\pi$ ist. Den Ecken des Minimalflächenstückes $M$, beziehungsweise den Polen der Kugel entsprechen die zu den Werthen $s = 0$, $s = \infty$ gehörenden Punkte des Bereiches $S$. Dem Punkte $G$ des Flächenstückes $M$, beziehungsweise dem Punkte $G_K$ des Bereiches $K$ entspricht ein Windungspunkt erster Ordnung $G_S$ des zweiblättrigen Bereiches $S$. Der diesem Punkte zugeordnete Werth der complexen Grösse $s$ möge durch $\mathfrak{s} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y} i = \mathfrak{r} e^{\Phi i}$ bezeichnet werden. Die zu $s$ und $\mathfrak{s}$ conjugirten Werthe sollen beziehungsweise durch $s_1$ und $\mathfrak{s}_1$ bezeichnet werden.

## 4.

## Conforme Abbildung des Flächenstückes $M$ auf einen ebenen Bereich $\Sigma$, bei welcher sowohl den Schaaren der Krümmungslinien als auch den Schaaren der Asymptotenlinien der Fläche Schaaren von parallelen Geraden entsprechen.

In den „Miscellen" wird gezeigt, dass es stets möglich ist, ein gegebenes Minimalflächenstück $M$ derart conform auf einen ebenen Bereich $\Sigma$ abzubilden, dass den Schaaren der Krümmungslinien und mithin auch den Schaaren der Asymptotenlinien, als isogonalen Trajectorien der ersteren, Schaaren von parallelen Geraden entsprechen. Die Gestalt des Bereiches $\Sigma$ für das hier zu betrachtende Minimalflächenstück $M$ lässt sich auf folgende Weise erschliessen:

Die Untersuchung der Dupin'schen Indicatrix für einen Punkt einer Minimalfläche zeigt, dass ein nicht singulärer Punkt einer solchen Fläche niemals ein Mittelpunkt für dieselbe sein kann. Vielmehr ergiebt sich als einfachste unter allen möglichen Annahmen, dass durch einen Punkt eines Minimalflächenstückes, der ein Mittelpunkt desselben sein soll, drei sich unter Winkeln von $60^0$ schneidende Krümmungslinien, und dementsprechend ebensoviele, diese Winkel halbirende Asymptotenlinien hindurchgehen.

Es soll deshalb angenommen werden, dass durch den Mittelpunkt $G$ des Flächenstückes $M$ drei Krümmungslinien und drei Asymptotenlinien hindurchgehen, von denen die ersteren unter einander und die letzteren unter einander sich unter Winkeln von $60^0$ schneiden. Die Singularität der Fläche $M$ im Punkte $G$ ist also diejenige, welche in „Sing. v. Min. fl." pag. 13 beschrieben ist, und welche bei der a. a. O. benutzten Bezeichnungsweise durch die Bedingungen $\alpha = 2$, $m = 3$ gekennzeichnet ist. Im Bereiche $\Sigma$ entspricht, da derselbe eine conforme Abbildung des Flächenstückes $M$ ist, den beiden Schaaren von Krümmungslinien ein orthogonales System von Geraden. Daraus folgt, wenn man den dem Punkte $G$ entsprechenden Punkt des Bereiches $\Sigma$ mit $G_\Sigma$ bezeichnet, dass jedem der sechs Winkel von $60^0$, deren Scheitel der Punkt $G$ ist, deren Schenkel die Tangenten der durch den Punkt $G$ gehenden Krümmungslinien in diesem Punkte sind, im Bereiche $\Sigma$ ein Winkel von $90^0$ entspricht, dessen Scheitel der Punkt $G_\Sigma$ ist. Lässt man demnach einen Punkt $P$ auf der Peripherie eines mit unendlich kleinem Radius um den Punkt $G$ beschriebenen Kreises einen einmaligen, in sich geschlossenen Umlauf beschreiben, so entspricht dieser Bewegung

im Bereiche $\Sigma$ die Kreisbewegung eines dem Punkte $P$ entsprechenden Punktes $P_{\Sigma}$ um den Punkt $G_{\Sigma}$, bei welcher der vom Punkte $G_{\Sigma}$ aus gezogene Radius vector desselben einen Winkel von der Grösse $3\pi$ beschreibt.

Die Betrachtung der Abbildung des Flächenstückes $M$ auf den Bereich $\Sigma$ vereinfacht sich etwas, wenn man ersteres als zweiblättrig, und den Punkt $G$ als einen Windungspunkt erster Ordnung desselben betrachtet. Das in der angegebenen Weise verdoppelte Flächenstück möge mit $M_{II}$, die ihm auf der Einheitskugel und in der Ebene der complexen Grösse $s$ entsprechenden vierblättrigen Bereiche mögen beziehungsweise mit $K_{II}$, $S_{II}$ bezeichnet werden. Es kehrt bei dieser Verfügung der den Punkt $G$ umlaufende Punkt $P$ erst dann in seine Anfangslage zurück, wenn der vom Punkte $G$ aus gezogene Radius vector desselben einen Winkel von der Grösse $4\pi$ beschrieben hat. Dieser Bewegung des Punktes $P$ entspricht im Bereiche $\Sigma$ eine Kreisbewegung des Punktes $P_{\Sigma}$ um den Punkt $G_{\Sigma}$, bei welcher der Radius vector des Punktes $P_{\Sigma}$ einen Winkel von der Grösse $6\pi$ beschreibt. Damit also zwischen dem zweiblättrigen Flächenstücke $M_{II}$ und dem zu demselben gehörenden Bereiche $\Sigma_{II}$ ein eindeutiges, punktweises Entsprechen stattfinde, ist es nothwendig, letzteren in der Umgebung des Punktes $G_{\Sigma}$ als dreiblättrig zu betrachten. Dem Punkte $G_{\Sigma}$ soll der Werth $\sigma = 0$ der complexen Grösse $\sigma$ entsprechen, welche geometrisch durch einen Punkt der Ebene des Bereiches $\Sigma$ dargestellt wird.

Die acht das Flächenstück $M_{II}$ begrenzenden Linien sind vier gerade Asymptotenlinien und vier ebene Krümmungscurven. In jeder Ecke des Flächenstückes endigt eine Linie der ersten Art und eine Linie der zweiten Art. Ausser diesen beiden, die Ecke begrenzenden Curven geht zufolge der gemachten Voraussetzung, dass in der Umgebung einer Ecke alle inneren Punkte des Flächenstückes $M_{II}$ auf ein und derselben Seite der Tangentialebene in der Ecke liegen, keine der auf dem Flächenstücke $M_{II}$ liegenden Asymptoten- oder Krümmungslinien durch diese Ecke. Es muss daher der Begrenzung des Flächenstückes $M_{II}$ als Begrenzung des Bereiches $\Sigma_{II}$ ein geschlossener Zug von acht geraden Linien entsprechen, von denen je zwei auf einander folgende Geraden Winkel von $45^0$ mit einander bilden. Für einen Beobachter, welcher diesen Linienzug, ohne umzukehren, durchläuft, muss an jeder Ecke die Richtung, in welcher jede folgende Gerade gegen die Richtung der vorhergehenden gedreht erscheint, entweder stets zur Linken, oder stets zur Rechten liegen.

Die Lage der acht Ecken des Bereiches $\Sigma$ lässt sich auf fol-

gende Weise bestimmen: Man bezeichne die acht Ecken des Minimalflächenstückes $M_{II}$, zu denen man der Reihe nach gelangt, wenn man von der im Coordinatenanfangspunkte gelegenen Ecke $A$ ausgehend das Flächenstück $M_{II}$ längs seiner Begrenzung so umläuft, dass man das Innere desselben zur Linken hat, mit $A$, $B$, $C$, $D$, $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$. Die diesen Ecken entsprechenden Ecken des Achtecks in der $\sigma$-Ebene mögen mit $A$, $B$, $\Gamma$, $\Delta$, $A_1$, $B_1$, $\Gamma_1$, $\Delta_1$ bezeichnet werden. Verbindet man nun Punkt $G$ mit den Ecken $A$ und $C$ durch in Bezug auf Punkt $G$ symmetrisch gelegene Curven auf der Fläche, so sind die Componenten der Linienelemente dieser Curven, genommen in symmetrisch gelegenen Punkten und in symmetrischen Fortschreitungsrichtungen beziehlich entgegengesetzt gleich. Ferner ist die Richtung der Normalen, und mithin die Grösse $s$, für symmetrisch in Bezug auf den Punkt $G$ gelegene Punkte dieselbe. In den „Miscellen" wird gezeigt, dass die Differentiale der Ausdrücke für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Minimalfläche $N$ sich in der Form

$$dx = \Re \tfrac{1}{2}(1-s^2)\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 ds, \quad dy = \Re \tfrac{1}{2} i(1+s^2)\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 ds, \quad dz = \Re s\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 ds$$

darstellen lassen, in welcher $\Re$ bedeutet, dass von der folgenden complexen Grösse nur der reelle Theil zu nehmen ist, und die Grössen $s$ und $\sigma$ in derselben Bedeutung für die Minimalfläche $N$ gebraucht sind, die ihnen im vorliegenden Falle für das Minimalflächenstück $M$ zukommt. Aus der Anwendung dieser Formeln auf die hier zu führende Untersuchung folgt, dass längs der beiden betrachteten Curven in correspondirenden Punkten die zu denselben gehörenden Werthe der Grösse $\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2$ entgegengesetzt gleich sind. Daraus, und aus der Beziehung, dass der zum Punkte $G_\Sigma$ gehörende Werth $\sigma$ gleich Null ist, folgt, dass die complexe Grösse $\sigma_\Gamma$, die geometrisch durch den Punkt $\Gamma$ der $\sigma$-Ebene dargestellt wird, sich nur durch den Factor $\pm i$ von der durch den Punkt $A$ geometrisch dargestellten Grösse $\sigma_A$ unterscheidet, dass also die Punkte $A$ und $\Gamma$ auf demselben um $G_\Sigma$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreise liegen. Damit die Bereiche $S_{II}$ und $\Sigma_{II}$ in den kleinsten Theilen gleichstimmig ähnlich werden, muss für den Beobachter, der die Begrenzung des Bereiches $\Sigma_{II}$ in der Richtung $AB\Gamma\ldots$ durchläuft, das Innere dieses Bereiches zur Rechten liegen. Daraus und aus dem, was über das Entsprechen des Minimalflächenstückes $M$ und des Bereiches $\Sigma$ in der Umgebung der einander zugeordneten Punkte $G$ und $G_\Sigma$ gesagt ist, folgt die Beziehung $i\sigma_A = \sigma_\Gamma$.

Analoge Betrachtungen, wie die hier für die Punkte $A$ und $\Gamma$ angestellten gelten für die Punkte $\Gamma$ und $A_1$, $A_1$ und $\Gamma_1$, $\Gamma_1$ und $A$. Mit anderen Worten: Die 4 Ecken $A$, $\Gamma$, $A_1$, $\Gamma_1$ des Bereiches $\Sigma_{II}$ liegen auf einer Kreislinie $k$, welche nach drei vollen Umläufen um den Punkt $G_\Sigma$ in sich selbst zurückkehrt; zu den Kreisbogen $\widehat{A\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A_1}$, $\widehat{A_1\Gamma_1}$, $\widehat{\Gamma_1 A}$ gehören Centriwinkel von der Grösse $\frac{3}{2}\pi$. Die analoge Behauptung für die andern vier Ecken $B$, $\Delta$, $B_1$, $\Delta_1$ des Minimalflächenstückes kann in entsprechender Weise bewiesen werden. Endlich ergiebt sich daraus, dass der Winkel $AB\Gamma$ die Grösse $\frac{1}{4}\pi$ hat, und der zu diesem Winkel gehörende Kreisbogen der Kreislinie $k$ durch einen Centriwinkel von der Grösse $\frac{1}{2}\pi$ gemessen wird, dass der Punkt $B$, und mit ihm die Punkte $\Delta$, $B_1$, $\Delta_1$ auf derselben Kreislinie wie die Punkte $A$, $\Gamma$, $A_1$, $\Gamma_1$ liegen. (Fig. 2).

Es ist demnach der zu dem Minimalflächenstücke $M_{II}$ gehörende Bereich $\Sigma_{II}$ ein die $\sigma$-Ebene zum Theil dreiblättrig, zum Theil zwei- und einblättrig bedeckender Bereich, dessen vollständige Begrenzung von einem zusammenhängenden Zuge von acht geraden Linien gebildet wird. Die acht Ecken der Begrenzung liegen auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der dem Bereiche angehörende Windungspunkt zweiter Ordnung $G_\Sigma$ ist. Alle Winkel des von den acht Geraden begrenzten Achtecks haben die Grösse $\frac{1}{4}\pi$. Die Seiten $AB$, $\Gamma\Delta$, $A_1B_1$, $\Gamma_1\Delta_1$ desselben sind gleich lang, die vier andern Seiten $B\Gamma$, $\Delta A_1$, $B_1\Gamma_1$, $\Delta_1 A$ desselben sind ebenfalls gleich lang. Die Länge des Radius $a$ des dem Achtecke umschriebenen Kreises bestimmt die absolute Grösse des Minimalflächenstückes $M_{II}$, welches dem Bereiche $\Sigma_{II}$ entspricht. Die Gestalt des letzteren ist völlig bestimmt durch den Werth des Verhältnisses zweier benachbarter Seiten des Achtecks. Eine Verfügung über den Werth dieses Quotienten und über die Länge des Radius $a$ braucht an dieser Stelle nicht getroffen zu werden.

## 5.

### Conforme Abbildung des Bereiches $S_{II}$ auf den Bereich $\Sigma_{II}$. Aufstellung analytischer Ausdrücke für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des Minimalflächenstückes $M$ mit Hülfe der diese Abbildung vermittelnden Function.

Die Function, welche die zusammenhängende und in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung des vierblättrigen ebenen Bereiches

$S_{II}$ auf den Bereich $\Sigma_{II}$ vermittelt, erhält man durch folgende Betrachtung:

Die Function

$$w = s^4$$

bildet den Bereich $S_{II}$ conform auf die vierblättrige Halbebene $\mathfrak{W}$ ab, in welcher $\mathfrak{R}(-iw) > 0$ ist. Der Begrenzung des Bereiches $S_{II}$ entspricht in der Ebene der complexen Grösse $w$ die Axe des Reellen. Dem Windungspunkte dritter Ordnung des Bereiches $S_{II}$, welcher durch die complexe Grösse $s = \mathfrak{s} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y}i = \mathfrak{r} \cdot e^{\Phi i}$ dargestellt ist, entspricht in der Halbebene $\mathfrak{W}$ ebenfalls ein Windungspunkt dritter Ordnung. Derselbe stellt die complexe Grösse $w = \mathfrak{w} = \mathfrak{s}^4$ geometrisch dar.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{w}_1$ die zu $\mathfrak{w}$ conjugirte complexe Grösse, so wird durch die Function

$$v = e^{-\Phi i} \cdot \sqrt[4]{\frac{w - \mathfrak{w}}{w - \mathfrak{w}_1}}$$

die vierblättrige Halbebene $\mathfrak{W}$ mit dem Windungspunkte $\mathfrak{w}$ zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich auf die einblättrige Fläche $\mathfrak{B}$ eines Kreises vom Radius 1 abgebildet. Dabei entspricht der die Halbebene $\mathfrak{W}$ begrenzenden, vierfach zu zählenden Axe des Reellen in der $\mathfrak{w}$-Ebene, beziehungsweise den Begrenzungslinien des Minimalflächenstückes $M_{II}$ die Peripherie des Einheitskreises in der Ebene der complexen Grösse $v$. Den acht aufeinander folgenden Ecken des Minimalflächenstückes $M_{II}$, beziehungsweise den Werthen $s = 0$, $s = \infty$ und $w = 0$, $w = \infty$ entsprechen acht auf einander folgende Punkte des Einheitskreises der $v$-Ebene, welche in derselben geometrisch die Werthe $v = \varepsilon \cdot e^{\Phi i}$ und $v = \varepsilon \cdot e^{-\Phi i}$ darstellen. Der Grösse $\varepsilon$ ist in diesen Ausdrücken jeder der vier Werthe $\pm 1$, $\pm i$ beizulegen. Dem Innern des Minimalflächenstückes $M_{II}$, beziehungsweise dem Innern der Bereiche $S_{II}$, $\mathfrak{W}$ entspricht das Innere des Bereiches $\mathfrak{B}$. Dem Punkte $G$ des Minimalflächenstückes, beziehungsweise den Werthen $s = \mathfrak{s}$, $w = \mathfrak{w}$ entspricht der Werth $v = 0$ des Bereiches $\mathfrak{B}$. Auf diesen Bereich ist der Bereich $\Sigma_{II}$ zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden, derart, dass die Nullpunkte der beiden Bereiche einander entsprechen, die Peripherie des den Bereich $\mathfrak{B}$ begrenzenden Einheitskreises der $v$-Ebene der Begrenzung des Bereiches $\Sigma_{II}$ entspricht und die acht Ecken des letzteren in passender Reihenfolge den acht durch die Werthe $v = \varepsilon \cdot e^{\Phi i}$ und $v = \varepsilon \cdot e^{-\Phi i}$ bestimmten Punkten der $v$-Ebene zugeordnet sind.

Die Function, welche diese Abbildung vermittelt, hat, wie sich aus der Betrachtung der Function

$$\frac{d}{dv}\left(\log \frac{d\sigma}{dv}\right)$$

ergiebt, die Form

$$\sigma = C \int_{v_0}^{v} \frac{v^2 \, dv}{\sqrt[4]{(v^4 - e^{4\Phi i})^3 (v^4 - e^{-4\Phi i})^3}},$$

in welcher $C$ eine zur Verfügung stehende Constante bedeutet. Der Werth der vierten Wurzel möge dadurch bestimmt werden, dass im Punkte $v = 0$

$$\sqrt[4]{(v^4 - e^{4\Phi i})^3 (v^4 - e^{-4\Phi i})^3} = +1$$

ist. Da dem Werthe $v = 0$ der Werth $\sigma = 0$ entsprechen soll, so ist $v_0 = 0$ zu setzen. Damit die den Krümmungslinien des Flächenstückes $M_{II}$ entsprechenden Geraden des durch die gefundene Function $\sigma(v)$ bestimmten Bereiches $\Sigma_{II}$ ein orthogonales System von Geraden bilden, welche beziehlich den Coordinatenaxen dieses Bereiches parallel sind, hat man der Constanten $C$ einen der Werthe $\pm\sqrt{\pm i} \cdot c$ beizulegen, in welchen $c$ eine reelle Constante bedeutet.

Führt man nun mit Hülfe der Beziehungen, welche zwischen den complexen Variablen $v$, $w$, $s$ existiren, die Grösse $s$ als Integrationsvariable in den für $\sigma$ gefundenen Ausdruck ein, und legt man der zur Verfügung stehenden reellen Constanten $c$ den positiven Werth des Wurzelausdruckes

$$c = \frac{2}{\mathfrak{r}} \sqrt{\sin 4\Phi}$$

bei, so ergiebt sich für $\sigma$ der Ausdruck

$$\sigma = \varepsilon\sqrt{2} \int_0^s \frac{ds}{\sqrt[4]{(s^4 - \mathfrak{s}^4)(s^4 - \mathfrak{s}_1^4)}}.$$

Diese Function bildet den Bereich $S_{II}$ auf den Bereich $\Sigma_{II}$ conform ab. Es bedeutet hier $\varepsilon$ einen der Werthe $\pm 1$, $\pm i$; derselbe kann willkürlich gewählt werden, da seine Bestimmung für das Folgende von keiner Bedeutung ist.

Legt man der Function $\sigma(s)$ nur diejenigen Werthe bei, welche dieselbe bei der Beschränkung der Veränderlichkeit der complexen Grösse $s$ auf den ursprünglichen Bereich $S$ annehmen kann, so vermittelt diese Function die conforme Abbildung des Bereiches $S$ auf den Bereich $\Sigma$. Demnach ist, wenn man gemäss der in den „Miscellen" eingeführten Bezeichnungsweise

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \mathfrak{F}(s)$$

setzt,

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{\sqrt{(s^4-\mathfrak{s}^4)(s^4-\mathfrak{s}_1^4)}}$$

die Function, welche in dem „Monatsber. 1866“ pag. 619 angegebenen Sinne zu dem gesuchten Minimalflächenstücke $M$ gehört.

Daher ergeben sich für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des Minimalflächenstückes $M$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \Re\int_{s_0}^{s}\frac{(1-s^2)\,ds}{\sqrt{(s^4-\mathfrak{s}^4)(s^4-\mathfrak{s}_1^4)}},\\ y &= \Re\int_{s_0}^{s}\frac{i(1+s^2)\,ds}{\sqrt{(s^4-\mathfrak{s}^4)(s^4-\mathfrak{s}_1^4)}},\\ z &= \Re\int_{s_0}^{s}\frac{2s\,ds}{\sqrt{(s^4-\mathfrak{s}^4)(s^4-\mathfrak{s}_1^4)}}.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Der Buchstabe $\Re$ zeigt an, dass nur der reelle Theil der folgenden complexen Grösse zu nehmen ist. Die Veränderlichkeit des den Werth $s$ geometrisch darstellenden Punktes ist zunächst auf den Bereich $S$ zu beschränken. Aus der Lage des gewählten Coordinatensystemes und den geometrischen Beziehungen, welche zwischen dem Flächenstücke $M$ und der conformen Abbildung desselben auf die $s$-Ebene bestehen, folgt, dass $s_0 = 0$ zu setzen ist, und dass der Quadratwurzel im Punkte $s = 0$, der dem Punkte $A$ des Flächenstückes entspricht, der Werth $+\mathfrak{r}^4$ beizulegen ist.

Durch die Gleichungen (1) ist die Gestalt des Minimalflächenstückes $M$ analytisch völlig bestimmt, sobald der Werth $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}e^{\Phi i}$ gegeben ist. Die Gestalt des Flächenstückes $M$ hängt also von zwei Parametern $\mathfrak{r}$ und $\Phi$ ab, welche den Intervallen $0 \leqq \mathfrak{r} \gtreqless \infty$, $0 \leqq \Phi \gtreqless \tfrac{1}{4}\pi$ angehören.

---

## Cap. III.

## Nachweis, dass das durch die gefundenen Gleichungen analytisch bestimmte Minimalflächenstück $M$ allen Bedingungen der gestellten Aufgabe genügt.

Zum Zwecke der Auffindung der das Minimalflächenstück $M$ analytisch darstellenden Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes

desselben ist eine Reihe von Voraussetzungen über die Beschaffenheit des gesuchten Flächenstückes $M$ gemacht worden, von denen nicht von vornherein ersichtlich ist, dass sie mit den Bedingungen, welchen gemäss der Aufgabestellung das Flächenstück $M$ genügen soll, verträglich sind. Aus diesem Umstande ergiebt sich die Nothwendigkeit des Nachweises, dass das durch die Gleichungen (1) analytisch dargestellte Minimalflächenstück $M$ wirklich allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Dieser Nachweis zerfällt in zwei Theile: Erstens muss nachgewiesen werden, dass das dem Bereiche $S$ entsprechende Minimalflächenstück $M$ längs zweier zu einander parallelen Geraden endigt, und zwei zu einander parallele Ebenen, gegen welche erstere unter Winkeln von $45^0$ geneigt sind, rechtwinklig trifft. Zweitens muss nachgewiesen werden, dass man durch geeignete Wahl der zur Verfügung stehenden Parameter $\mathfrak{r}$ und $\Phi$ herbeiführen kann, dass die Geraden und die Ebenen, durch welche die Begrenzung des durch die Gleichungen (1) analytisch dargestellten Minimalflächenstückes $M$ gebildet wird, jede mit den gestellten Bedingungen verträgliche Lage zu einander annehmen können.

1.

**Nachweis, dass das dem Bereiche $S$ entsprechende Minimalflächenstück längs zweier zu einander parallelen Geraden endigt, und zwei zu einander parallele Ebenen, gegen welche erstere unter Winkeln von $45^0$ geneigt sind, rechtwinklig trifft.**

Die beiden Blätter des ebenen Bereiches $S$ mögen längs des Kreisbogens $s = \mathfrak{r} e^{\psi i}$, $(\Phi \leqq \psi \overline{\gtrless} \frac{1}{4}\pi)$ miteinander zusammenhängend gedacht werden. Die den vier Ecken des Minimalflächenstückes $M$ entsprechenden Punkte mögen beziehungsweise mit $A_s$, $B_s$, $C_s$, $D_s$ bezeichnet werden. Gemäss der vorher getroffenen Verfügung hat die Function

$$\sqrt{R(s)} = \sqrt{(s^4 - \mathfrak{s}^4)(s^4 - \mathfrak{s}_1^4)}$$

im Punkte $A_s$ den Werth $+\mathfrak{r}^4$, mithin im Punkte $C_s$ den Werth $-\mathfrak{r}^4$. Lässt man den dem Werthe $s$ entsprechenden Punkt der $s$-Ebene die Begrenzung des Bereiches $S$ durchlaufen, so nimmt $\sqrt{R(s)}$ längs der ganzen Begrenzung nur reelle Werthe an und der Wechsel des Vorzeichens der Function $\sqrt{R(s)}$ findet für $s = \infty$ satt.

Für reelle Werthe der Grösse $s$ ist der Ausdruck $\dfrac{(1+s^2)\,ds}{\sqrt{R(s)}}$

reell. Daraus und aus der Gleichung für die $y$-Coordinate eines Punktes des betrachteten Minimalflächenstückes $M$ geht hervor, dass der zweifach zu denkenden positiven Hälfte der Axe des Reellen in der $s$-Ebene zwei ebene Curven als Theile der Begrenzung des Flächenstückes $M$ entsprechen. Die Ebenen, in denen diese Curven liegen, sind durch Gleichungen der Form $y = c$ dargestellt. Die Curven sind geodätische Krümmungslinien des Flächenstückes $M$. Letzteres trifft die zu einander parallelen Ebenen, in welchen dieselben liegen, also rechtwinklig.

Für jeden der Werthe $s = r\sqrt{i}$ $(0 \leqq r \overline{\gtrless} \infty)$ sind die reellen Theile der Ausdrücke $\frac{(1-s^2)\,ds}{\sqrt{R(s)}}$ und $\frac{-i(1+s^2)\,ds}{\sqrt{R(s)}}$ beziehlich gleich; der Ausdruck $\frac{2s\,ds}{\sqrt{R(s)}}$ ist für diese Werthe der Grösse $s$ rein imaginär. Auf analoge Weise, wie oben, ergiebt sich daher, dass der zweifach zu denkenden Geraden $s = r\sqrt{i}$ $(0 \leqq r \overline{\gtrless} \infty)$ der $s$-Ebene als Theile der Begrenzung des Flächenstückes $M$ zwei gerade Linien entsprechen, deren Gleichungen beide die Form $z = c_1$, $x - c_2 = -y$ haben. Diese beiden Geraden sind also parallel und gegen die Ebenen der vorher erwähnten Krümmungslinien unter Winkeln von $45^0$ geneigt.

Weil das Gebiet $S$ ein einfach zusammenhängendes ist, und weil innerhalb der dasselbe darstellenden zweiblättrigen Riemann'schen Fläche die Function $\mathfrak{F}(s)$ eindeutig erklärt ist, weil endlich, von Grenzfällen abgesehen, die Werthe der Ausdrücke für die Coordinaten $x$, $y$, $z$ überall endlich bleiben, ist das Minimalflächenstück $M$ ein einfach zusammenhängendes.

Damit ist der erste Theil des zu Anfang dieses Abschnittes als nothwendig bezeichneten Nachweises erledigt.

## 2.

### Nachweis, dass bei geeigneter Wahl der zur Verfügung stehenden Parameter die Geraden und die Ebenen, welche die Begrenzung des durch die gefundenen Gleichungen analytisch dargestellten Minimalflächenstückes $M$ bilden, jede mit den gestellten Bedingungen verträgliche Lage zu einander annehmen können.

Zunächst sind die beiden Werthe, welche jeder der drei im vorigen Abschnitte eingeführten Constanten $c$, $c_1$, $c_2$ beizulegen sind, zu bestimmen. Aus der Verfügung, welche über die untere Grenze

der drei Integrale getroffen ist, die in den Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes des Flächenstückes $M$ vorkommen, ergiebt sich, dass der Constanten $c$ beziehlich die Werthe

$$c = 0 \text{ und } c = -\mathfrak{A} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{(1+r^2)\,dr}{\sqrt{r^8 + 2r^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi + \mathfrak{r}^8}}$$

beizulegen sind. Ebenso ergiebt sich, dass den Constanten $c_1$ und $c_2$ in den Gleichungen für die eine der beiden das Flächenstück begrenzenden Geraden gleichzeitig der Werth Null, in den Gleichungen für die andere derselben die Werthe

$$c_1 = \mathfrak{H} = \int_0^\infty \frac{2r\,dr}{\sqrt{r^8 - 2r^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi + \mathfrak{r}^8}},$$

$$c_2 = \mathfrak{R} = \int_0^\infty \frac{(1-r^2)\,dr}{\sqrt{r^8 - 2r^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi + \mathfrak{r}^8}}$$

beizulegen sind. Der Integrationsvariablen $r$ in den Ausdrücken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{R}$ sind nur reelle Werthe beizulegen, den Quadratwurzeln in denselben ist ihr positiver Werth zu geben.

Es möge an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass die $x$-Coordinate eines Punktes der in der Ebene $y = 0$ liegenden Krümmungslinie des Flächenstückes $M$ in dem dem Punkte $s = 1$ entsprechenden Punkte ihren grössten Werth erreicht, und dass die $x$-Coordinate der Ecke $D$, oder das Integral $\mathfrak{R}$ nur dann positiven Werth hat, wenn $\mathfrak{r} < 1$ ist. Es soll im Interesse der Einfachheit der Darstellung von jetzt an die — wie sich ergeben wird, die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beschränkende — Voraussetzung gemacht werden, dass $\mathfrak{r} < 1$ ist.

Der Abstand der Geraden $CD$ von der Ebene $z = 0$ möge als die H ö h e, der Abstand $\mathfrak{A}$ der Ebenen der beiden Krümmungslinien $BC$ und $DA$ von einander möge als B r e i t e des Flächenstückes $M$ bezeichnet werden. Die Werthe der Integrale $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H}$ können im Sinne der analytischen Geometrie des Raumes als Componenten der Strecke $AD = BC$, genommen in der Richtung der $x$- und $z$-Axe des gewählten Coordinatensystemes betrachtet werden; diese Strecke stellt nach Grösse und Richtung die Parallelverschiebung der Begrenzungsgeraden $CD$ gegen die Begrenzungsgerade $AB$ des Flächenstückes $M$ dar. Die Componente dieser Strecke in der Richtung der $y$-Axe des Coordinatensystemes hat den Werth Null.

Die Gestalt des Flächenstückes $M$ ist, wenn man von der absoluten Grösse desselben absieht, durch die Verfügung über die Grösse

zweier Winkel $\Psi$ und $X$ bestimmt. Ersterer soll den Winkel zwischen der Geraden $AD$ und der Richtung der positiven $x$-Axe, letzterer den Winkel zwischen der Projection der Geraden $AC$ auf die Ebene $x = 0$ und der Richtung der negativen $y$-Axe bedeuten. (Fig. 3.) Demnach ist

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{N}} \text{ und } \operatorname{tg} X = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}}.$$

Um den Nachweis zu führen, dass das Flächenstück $M$ jede mit den Bedingungen der gestellten Aufgabe verträgliche Gestalt annehmen kann, genügt es, zu zeigen, dass man durch geeignete Wahl der Parameter $\mathfrak{r}$ und $\Phi$ bewirken kann, dass die Winkel $\Psi$ und $X$ unabhängig von einander zwei beliebige den Intervallen $0 \leqq \Psi \gtreqless \frac{1}{2}\pi$ und $0 \leqq X \gtreqless \frac{1}{2}\pi$ angehörende Werthe annehmen können. Eine Ausdehnung der Untersuchung auf solche Fälle, in denen einer der Winkel $\Psi$ und $X$ oder beide Winkel grösser als $\frac{1}{2}\pi$ sind, ist mit Rücksicht auf die nachher zu betrachtende Periodicität der Minimalfläche, welche durch analytische Fortsetzung des Flächenstückes $M$ entsteht, nicht erforderlich.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass man über die Parameter $\mathfrak{r}$ und $\Phi$ in der angedeuteten, zweckentsprechenden Weise verfügen kann, ist die, dass für jedes, den Bedingungen $0 \leqq \mathfrak{r} \gtreqless 1$, $0 \leqq \Phi \gtreqless \frac{1}{4}\pi$ genügende Werthepaar $\mathfrak{r}$ und $\Phi$ die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{A} & \mathfrak{H} \\ \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \mathfrak{r}} & \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \mathfrak{r}} & \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{r}} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden bleibt. Dabei sollen vorläufig von der Untersuchung diejenigen Grenzfälle, in denen

$$\Phi = 0, \quad \Phi = \tfrac{1}{4}\pi, \quad \mathfrak{r} = 0, \quad \mathfrak{r} = 1$$

ist, ausgeschlossen werden.

Die Integrale $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ gehen, wenn man sie in je zwei Integrale mit den Grenzen 0 und $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}$ und $\infty$ zerlegt, und beziehungsweise durch die Substitutionen $t\mathfrak{r} = r$ und $\frac{\mathfrak{r}}{t} = r$ die Grösse $t$ als Integrationsvariable einführt, in die folgenden über:

$$\mathfrak{H} = \frac{4}{\mathfrak{r}^2} \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{t^8 - 2t^4 \cos 4\Phi + 1}},$$

$$\mathfrak{N} = \frac{1-\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{r}^3} \int_0^1 \frac{(1+t^2)\,dt}{\sqrt{t^8 - 2t^4 \cos 4\Phi + 1}},$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1+\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{r}^3\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{(1+t^2)\,dt}{\sqrt{t^8 + 2t^4 \cos 4\Phi + 1}}.$$

Ersetzt man die Integrationsvariable $t$ in den Integralen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}$ beziehlich durch $\tau$ und $\mathfrak{t}$, so ergiebt die Ausrechnung des Werthes der Determinante $D$ folgenden Ausdruck:

$$D = C \left\{ \begin{array}{l} (1+\mathfrak{r}^2)^2 \displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1+t^2)\cdot(1+\mathfrak{t}^2)\cdot\tau\cdot dt\,d\mathfrak{t}\,d\tau}{(t^8-2t^4\cos 4\Phi+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(\mathfrak{t}^8+2\mathfrak{t}^4\cos 4\Phi+1)^{\frac{3}{2}}\cdot(\tau^8-2\tau^4\cos 4\Phi+1)^{\frac{1}{2}}} \\ + 4\mathfrak{r}^2 \displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1+t^2)\cdot(1+\mathfrak{t}^2)\cdot\tau^5\cdot dt\,d\mathfrak{t}\,d\tau}{(t^8-2t^4\cos 4\Phi+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(\mathfrak{t}^8+2\mathfrak{t}^4\cos 4\Phi+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(\tau^8-2\tau^4\cos 4\Phi+1)^{\frac{3}{2}}} \\ +(1-\mathfrak{r}^2)^2 \displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1+t^2)\cdot(1+\mathfrak{t}^2)\cdot\tau\cdot dt\,d\mathfrak{t}\,d\tau}{(t^8-2t^4\cos 4\Phi+1)^{\frac{3}{2}}\cdot(\mathfrak{t}^8+2\mathfrak{t}^4\cos 4\Phi+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(\tau^8-2\tau^4\cos 4\Phi+1)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right\}.$$

Alle Elemente der vorkommenden dreifachen Integrale sind positiv, mithin sind die Integrale selbst positiv. Die Coëfficienten der Integrale und der Factor $C = \dfrac{16 \sin 4\Phi}{\mathfrak{r}^9\sqrt{2}}$ sind ebenfalls positiv, mithin hat also die Determinante $D$ für alle Werthe von $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}e^{\Phi i}$, welche einem Bereiche angehören, in dem $0 < \mathfrak{r} < 1$, $0 < \Phi < \frac{1}{4}\pi$ ist, positiven Werth. Für die Werthe von $\mathfrak{s}$, welche auf der Begrenzung dieses Bereiches liegen, nehmen die Winkel $\Psi$ und $X$, wie eine nähere Untersuchung dieser Grenzfälle zeigt, gleichfalls die ihnen zukommenden Grenzwerthe 0 und $\frac{1}{2}\pi$ an.

Die Stetigkeit der Functionen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ erstreckt sich bis an die Grenzen des erwähnten Bereiches der Grösse $\mathfrak{s}$ heran; sie bleibt aufrecht erhalten für $\lim \mathfrak{r} = 1$; für $\lim \Phi = \frac{1}{4}\pi$, beziehungsweise $\lim \Phi = 0$ werden $\mathfrak{A}$, beziehungsweise $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{N}$ unendlich gross; dagegen bleibt für $\lim \Phi = 0$ und $0 \leqq \mathfrak{r} < 1$ der Werth des Verhältnisses $(\mathfrak{H} : \mathfrak{N})$ ein endlicher.

Aus den abgeleiteten Ausdrücken für $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ ergiebt sich, dass diese die Gestalt des Flächenstückes $M$ bestimmenden Grössen rationale Functionen des Parameters $\mathfrak{r}$, hingegen transcendente Func tionen des Parameters $\Phi$ sind.

## Cap. IV.

## Untersuchung des Flächenstückes $M$ und seiner analytischen Fortsetzung.

### 1.

### Betrachtung eines Flächenstückes $M_8$ der zu der gefundenen Function $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden Minimalfläche welches aus vier zu dem Flächenstücke $M$ congruenten und vier zu demselben symmetrischen Flächenstücken besteht.

In den „Monatsber. 1866“ wird gezeigt, dass für die Theorie der Minimalflächen die folgenden beiden, in Wechselbeziehung zu einander stehenden Sätze gelten:

1) Für alle einem Bereiche $S$ angehörenden Werthe $s$ sei eine analytische Function $\mathfrak{F}(s)$ erklärt. Dem Bereiche $S$ entspricht ein Minimalflächenstück $M$, welches analytisch durch die Gleichungen

$$x = \Re\int(1-s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds,\quad y = \Re\int i(1+s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds,\quad z = \Re\int 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds$$

für die rechtwinkligen Coordinaten eines seiner Punkte erklärt ist. Wenn es möglich ist, durch analytische Fortsetzung die Function $\mathfrak{F}(s)$ für Werthe von $s$ zu erklären, welche einem über den Bereich $S$ hinaus erweiterten Bereiche $S^*$ angehören, so stellen die durch die Function $\mathfrak{F}(s)$ bestimmten Ausdrücke $x$, $y$, $z$ auch für alle Werthe von $s$, welche dem erweiterten Bereiche $S^*$ angehören, die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes eines Minimalflächenstückes $M^*$ dar. Dieses ist die analytische Fortsetzung des dem Bereiche $S^*$ entsprechenden Minimalflächenstückes $M$. Die geometrische Beziehung, welche zwischen jedem Punkte des Flächenstückes $M$ und dem ihm entsprechenden Punkte des Bereiches $S$ besteht, bleibt auch für einander entsprechende Punkte des Flächenstückes $M^*$ und des Bereiches $S^*$ erhalten.

2) Die analytische Function $\mathfrak{F}(s)$, welche zu einem gegebenen Minimalflächenstücke $M^*$ gehört, und für einen bestimmten Bereich $S$ erklärt sein mag, kann analytisch fortgesetzt werden für alle Werthe ihres Argumentes, welche geometrisch durch Punkte desjenigen Bereiches dargestellt werden, welcher die conforme Abbildung des Flächenstückes $M^*$ auf die $s$-Ebene bedeutet.

Auf Grund dieser beiden Sätze kann man die Frage stellen, ob das betrachtete Minimalflächenstück $M$ analytisch über seine Begrenzung hinaus fortgesetzt werden kann. Dieselbe findet eine ein-

fache Beantwortung mit Hülfe zweier in den „Miscellen" mitgetheilten Sätze, deren Anwendung es gleichzeitig gestattet, aus der Gestalt des Flächenstückes $M$ ohne Rechnung auf die Gestalt seiner etwa möglichen analytischen Fortsetzung zu schliessen. Diese Sätze lauten:

1) Jede auf einem Stücke einer Minimalfläche liegende Gerade ist eine Symmetrieaxe der durch analytische Fortsetzung dieses Stückes entstehenden Minimalfläche.

2) Wenn auf einem Stücke einer Minimalfläche eine ebene Curve liegt, längs welcher die Tangentialebene der Fläche und die Ebene der Curve mit einander einen rechten Winkel einschliessen, so ist die Ebene dieser Curve eine Symmetrieebene derjenigen Minimalfläche, welche durch analytische Fortsetzung dieses Stückes entsteht.

Aus der Anwendung des zweiten Satzes ergiebt sich, dass man als analytische Fortsetzung des Flächenstückes $M$ ein zu ihm in Bezug auf die Ebene $y = 0$ symmetrisch gelegenes Flächenstück $M'$ betrachten kann. Dasselbe bildet mit dem Flächenstücke $M$ zusammen ein einfach zusammenhängendes Minimalflächenstück $M_2$, welches einerseits von ebenen, einander congruenten Krümmungslinien in den Ebenen $y = \pm \mathfrak{A}$ begrenzt wird, andrerseits aber längs vier, paarweise rechte Winkel mit einander bildenden und paarweise parallelen Geraden endigt. Die Gleichungen dieser Geraden sind beziehungsweise $z = 0$, $x = \pm y$ und $z = \mathfrak{H}$, $x - \mathfrak{R} = \pm y$ ($x$, bezw. $x - \mathfrak{R}$ positiv).

Aus der Anwendung des ersten Satzes ergiebt sich, dass man durch eine 180° betragende Drehung des Flächenstückes $M_2$ um die Gerade $x = y$ als analytische Fortsetzung desselben ein dem ersteren congruentes Flächenstück erhält, dessen Begrenzungsgeraden in den Ebenen $z = 0$ und $z = -\mathfrak{H}$ liegen, und gegen die Richtungen der $x$- und $y$-Axe des gewählten Coordinatensystemes unter Winkeln von 45° geneigt sind.

Durch eine dreimalige Wiederholung des Verfahrens, das Flächenstück $M_2$ um eine seiner in die Ebene $z = 0$ fallenden Begrenzungsgeraden je eine Drehung von 180° beschreiben zu lassen, erhält man als analytische Fortsetzung des Flächenstückes $M_2$ ein einfach zusammenhängendes Minimalflächenstück $M_8$, welches aus vier dem Flächenstücke $M$ congruenten und vier zu demselben symmetrischen Flächenstücken zusammengesetzt ist. Dasselbe wird von acht geraden Asymptotenlinien und acht ebenen Krümmungslinien begrenzt. Jede der acht Geraden hat die Länge $\mathfrak{A} . \sqrt{2}$; je vier derselben liegen in einer der Ebenen $z = \pm \mathfrak{H}$ und sind beziehungsweise den Geraden parallel, welche die von der $x$-Axe und der $y$-Axe

des Coordinatensystemes gebildeten rechten Winkel halbiren. Je zwei derselben gehen von einem der vier Punkte $z = \mathfrak{H}$, $y = 0$, $x = \pm \mathfrak{R}$ und $z = -\mathfrak{H}$, $y = \pm \mathfrak{R}$, $x = 0$ aus. Die acht Krümmungslinien sind congruent und liegen paarweise in den Ebenen $x = \pm \mathfrak{A}$, $y = \pm \mathfrak{A}$. Sie endigen einerseits in den Endpunkten der acht erwähnten Begrenzungsgeraden, andererseits zu je zweien in den vier Punkten $z = 0$, $x = \pm \mathfrak{A}$, $y = \pm \mathfrak{A}$.

Die Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ sind, gemäss der Entstehung des Flächenstückes $M_8$, Symmetrieebenen desselben. Die Gerade $x = 0$, $y = 0$ ist demnach eine Symmetrieaxe desselben; sie steht senkrecht auf den beiden durch den Punkt $x = y = z = 0$ gehenden geraden Asymptotenlinien des Flächenstückes $M_8$, welche ebenfalls Symmetrieaxen desselben sind.

Bei der conformen Abbildung des Minimalflächenstückes $M_8$ durch stereographische Projection seines sphärischen Bildes auf die Aequatorebene der Einheitskugel ergiebt sich als zu dem Flächenstücke $M_8$ gehörender Bereich $S_8$ die zweifach bedeckt zu denkende unendliche Ebene der complexen Grösse $s$. Für die diesen Bereich darstellende zweiblättrige Riemann'sche Fläche sind die, den Werthen

$$s = \mathfrak{r} e^{\pm \Phi i}, \quad s = i \mathfrak{r} e^{\pm \Phi i}, \quad s = -\mathfrak{r} e^{\pm \Phi i}, \quad s = -i \mathfrak{r} e^{\pm \Phi i}$$

entsprechenden acht Punkte Windungspunkte erster Ordnung. Den Zusammenhang zwischen dem oberen und unteren Blatte des Bereiches $S_8$ kann man sich hergestellt denken längs vier Bögen des Kreises, der mit dem Radius $\mathfrak{r}$ um den Nullpunkt der $s$-Ebene beschrieben ist; diese Bögen haben gleiche Länge, sind durch je zwei auf der Peripherie des Kreises aufeinanderfolgende Windungspunkte begrenzt und werden von den die vier Winkel der Coordinatenaxen der $s$-Ebene halbirenden Geraden halbirt.

Um den Bereich $S_8$ zu einem einfach zusammenhängenden zu machen und zu bewirken, dass seine Begrenzungslinien den Begrenzungslinien des Flächenstückes $M_8$ entsprechen, sind bei der getroffenen Verfügung über den Zusammenhang der Blätter des Bereiches dieselben in folgender Weise aufgeschnitten zu denken: Durch das obere Blatt sind längs vier gerader Linien, welche gegen die Richtungen der Coordinatenaxen unter Winkeln von 45° geneigt sind und sich von den vier Punkten $s = \pm \mathfrak{r}\sqrt{i}$, $s = \pm i\mathfrak{r}\sqrt{i}$ aus bis ins Unendliche erstrecken, Schnitte zu legen. Das untere Blatt ist aufzuschneiden längs vier gerader Linien, welche sich vom Punkte $s = 0$ nach den vier eben genannten Punkten erstrecken, und durch vier geradlinige Schnitte längs der Coordinatenaxen, die sich vom Punkte $s = 0$ bis ins Unendliche erstrecken. (Fig. 4.)

Auf analytischem Wege ergiebt sich die Symmetrie des Flächenstückes $M_8$ in Bezug auf die Ebenen $x = 0$, $y = 0$ und die Gerade $x = y = 0$ bequem aus den Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes der Fläche, wenn man denselben die Form giebt:

$$(2)\quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\int\frac{(1-s^2)\,ds}{\sqrt{s^8-2s^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}} + \tfrac{1}{2}\int\frac{(1-s_1^2)\,ds_1}{\sqrt{s_1^8-2s_1^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}},\\ y &= \tfrac{1}{2}\int\frac{i(1+s^2)\,ds}{\sqrt{s^8-2s^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}} - \tfrac{1}{2}\int\frac{i(1+s_1^2)\,ds_1}{\sqrt{s_1^8-2s_1^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}},\\ z &= \tfrac{1}{2}\int\frac{2s\,ds}{\sqrt{s^8-2s^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}} + \tfrac{1}{2}\int\frac{2s_1\,ds_1}{\sqrt{s_1^8-2s_1^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}}. \end{aligned}$$

Vertauscht man nämlich $s$ mit $s_1$, so bleiben $x$ und $z$ ungeändert, und $y$ geht in seinen entgegengesetzten Werth über, und vertauscht man gleichzeitig $s$ mit $-s_1$, $s_1$ mit $-s$, so bleiben $y$ und $z$ ungeändert und $x$ geht in seinen entgegengesetzten Werth über.

Die Symmetrie des Flächenstückes $M_8$ in Bezug auf die Geraden $z = 0$, $x = \pm y$ ergiebt sich einfach aus den Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes desselben, wenn die Fläche auf ein neues Coordinatensystem bezogen wird, welches mit dem vorigen die $z$-Axe gemeinsam hat, und gegen dasselbe in der Richtung von der positiven $y$-Axe nach der positiven $x$-Axe um 45° gedreht ist.

Für die Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ eines beliebigen Punktes des Flächenstückes $M_8$ in Bezug auf das neue Coordinatensystem ergeben sich dann die Ausdrücke:

$$(3)\quad \begin{aligned} x' &= \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \int\frac{1-i}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(1-is^2)\,ds}{\sqrt{s^8-2s^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}} + \int\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(1+is_1^2)\,ds_1}{\sqrt{s_1^8-2s_1^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}},\\ y' &= \frac{x+y}{\sqrt{2}} = \int\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(1+is^2)\,ds}{\sqrt{s^8-2s^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}} + \int\frac{1-i}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(1-is_1^2)\,ds_1}{\sqrt{s_1^8-2s_1^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}},\\ z' &= \frac{z}{1} = \int\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2s\,ds}{\sqrt{s^8-2s^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}} + \int\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2s_1\,ds_1}{\sqrt{s_1^8-2s_1^4\mathfrak{r}^4\cos 4\Phi+\mathfrak{r}^8}}. \end{aligned}$$

Vertauscht man in diesen Formeln gleichzeitig $s$ mit $is_1$ und $s_1$ mit $-is$, so bleibt $x'$ ungeändert, $y'$ und $z'$ gehen in ihre entgegengesetzten Werthe über, und vertauscht man gleichzeitig $s$ mit $-is_1$ und $s_1$ mit $is$, so bleibt $y'$ ungeändert, und $x'$ und $z'$ gehen in ihre entgegengesetzten Werthe über. Die geraden Linien $z = 0$, $x' = 0$ und $z = 0$, $y' = 0$, oder, in Bezug auf das alte Coordinatensystem, $z = 0$, $x = \mp y$ sind also Symmetrieaxen des Minimalflächenstückes $M_8$.

## 2.

**Nachweis, dass die Gestalt des dem Flächenstücke $M$ entsprechenden Bereiches $\Sigma$ nur von dem einen der beiden Parameter abhängt. Folgerungen aus diesem Satze.**

Man betrachte zwei Minimalflächenstücke $M_\alpha$ und $M_\beta$, welche durch die Gleichungen (1) für die rechtwinkligen Coordinaten eines ihrer Punkte analytisch bestimmt sind, wenn man einerseits $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_\alpha e^{\Phi i}$, andrerseits $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_\beta e^{\Phi i}$ setzt. Diesen Flächenstücken entsprechen in der Ebene der complexen Grösse $s$ zwei zweiblättrige Bereiche $S_\alpha$ und $S_\beta$, welche einander und dem Bereiche $S$ ähnlich sind, und aufeinander durch die Function

$$s_\alpha = \frac{\mathfrak{r}_\alpha}{\mathfrak{r}_\beta} \cdot s_\beta$$

conform abgebildet werden. Die zu den Flächenstücken $M_\alpha$ und $M_\beta$ gehörenden conformen Abbildungen $\Sigma_\alpha$ und $\Sigma_\beta$ derselben auf die Ebene der complexen Grösse $\sigma$ werden, wenn man von einem Factor $\sqrt[4]{1}$ absieht, durch die Functionen

$$\sigma_\alpha = \sqrt{2}\int\frac{ds}{\sqrt[4]{(s^4-\mathfrak{s}_\alpha^4)\,(s^4-\mathfrak{s}_{1\alpha}^4)}} \text{ und } \sigma_\beta = \sqrt{2}\int\frac{ds}{\sqrt[4]{(s^4-\mathfrak{s}_\beta^4)\,(s^4-\mathfrak{s}_{1\beta}^4)}}$$

vermittelt, in denen beziehlich $\mathfrak{s}_{1\alpha}$ und $\mathfrak{s}_{1\beta}$ die conjugirten Grössen zu $\mathfrak{s}_\alpha$ und $\mathfrak{s}_\beta$ bedeuten. Diese beiden Functionen gehen durch die Substitutionen $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_\alpha t$ und $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_\beta t$ beide in die Function

$$\sigma = c\int\frac{dt}{\sqrt[4]{(t^4-e^{4\Phi i})\,(t^4-e^{-4\Phi i})}}$$

über, in der beziehungsweise $c = (\sqrt{2}:\mathfrak{r}_\alpha^3)$ und $c = (\sqrt{2}:\mathfrak{r}_\beta^3)$ zu setzen ist. Daraus ergiebt sich der Satz: Die Bereiche $\Sigma$, welche zu allen denjenigen durch die Gleichungen (1) analytisch dargestellten Minimalflächenstücken gehören, die sich nur durch verschiedene Werthe des einen ihre Gestalt bestimmenden Parameters $\Phi$ unterscheiden, sind nicht wesentlich von einander verschieden. Das Verhältniss zweier benachbarter Geraden der Begrenzung des Bereiches $\Sigma_{II}$ hängt also nicht von dem Werthe des Parameters $\mathfrak{r}$, sondern nur von dem des Parameters $\Phi$ ab. Es genügt daher, solange es sich nur um die Aufsuchung von Krümmungslinien und Asymptotenlinien der Minimalfläche mit Hülfe der Beziehung derselben auf die $\sigma$-Ebene handelt, statt aller Flächenstücke $M$, welche zu einer durch den

Parameter $\Phi$ gekennzeichneten Gruppe von Flächenstücken $M$ gehören, ein solches Flächenstück zu betrachten.

Das Integral

$$\sigma = \int \frac{dt}{\sqrt[4]{(t^4 - e^{4\Phi i})(t^4 - e^{-4\Phi i})}},$$

welches, von einem constanten reellen Factor abgesehen, bei passender Wahl des Bereiches der complexen Grösse $t$ die conforme Abbildung des Bereiches $S_8$ auf einen Bereich $\Sigma_8$ der Ebene der complexen Grösse $\sigma$ vermittelt, geht für längs des Einheitskreises erstreckte Integrationen durch die Substitution $t = e^{\psi i}$ über in die Form

$$\sigma = i \int \frac{d\psi}{\sqrt[4]{2(\cos 4\psi - \cos 4\Phi)}}.$$

Für alle Werthe von $\psi$, welche den Intervallen

$$-\Phi \leqq \psi \overset{=}{<} \Phi, \quad (\tfrac{1}{2}\pi - \Phi) \leqq \psi \overset{=}{<} (\tfrac{1}{2}\pi + \Phi), \quad (\pi - \Phi) \leqq \psi \overset{=}{<} (\pi + \Phi),$$
$$(\tfrac{3}{2}\pi - \Phi) \leqq \psi \overset{=}{<} (\tfrac{3}{2}\pi + \Phi)$$

angehören, ist die Abweichung jedes Elementes des Integrals durch einen der vier Werthe $\sqrt[4]{+1}$ gegeben. Der Uebergang von einem dieser Werthe zu einem andern derselben findet nie im Innern eines dieser Intervalle statt. Für jedes der vier zwischen den genannten Intervallen liegenden Intervalle, welche die Integrationsvariable $\psi$ durchlaufen kann, ist die Abweichung jedes Elementes des Integrals durch einen der vier Werthe $\sqrt[4]{-1}$ gegeben.

Daraus folgt: Der Kreis, auf welchem die acht Windungspunkte des Bereiches $S_8$ liegen, wird durch diese in acht Bögen zerlegt, welche zu je vieren einander gleich sind, und beziehungsweise durch die Coordinatenaxen oder die Halbirungslinien der Winkel derselben gehälftet werden. Den vier von den Coordinatenaxen halbirten Kreisbogen im oberen Blatte der $s$-Ebene entsprechen Theile von vier Krümmungslinien, den von den Halbirungslinien der Winkel der Coordinatenaxen gehälfteten Kreisbogen in demselben Blatte der $s$-Ebene entsprechen Theile von vier Asymptotenlinien des Flächenstückes $M_8$. Diese acht Linien verbinden durch einen geschlossenen Linienzug die acht Mittelpunkte der acht Flächenstücke, aus denen sich das Flächenstück $M_8$ zusammensetzt. In jedem der Mittelpunkte stossen je eine dieser Krümmungslinien und je eine dieser Asymptotenlinien zusammen. Die Tangenten dieser Curven in ihrem Schnittpunkte bilden mit einander rechte Winkel. Längs des ganzen beschriebenen Linienzuges ist die Neigung der Normalen des Flächenstückes $M_8$ gegen seine Symmetrieaxe $x = y = 0$ constant. Es

entspricht mithin dem Innern des durch die Windungspunkte gehenden Kreises im oberen Blatte des Bereiches $S_8$ ein von vier Krümmungslinien und vier Asymptotenlinien in der beschriebenen Weise begrenztes, einfach zusammenhängendes Minimalflächenstück, dessen Normalen längs seines ganzes Randes gegen die $z$-Axe constante Neigung haben, und auf welchem im allgemeinen Falle zwei ebene Krümmungslinien und zwei gerade Asymptotenlinien liegen. Die vier letztgenannten Linien gehen durch den Anfangspunkt des gewählten Coordinatensystemes.

3.

Untersuchung der Periodicität der durch analytische Fortsetzung des Flächenstückes $M$ entstehenden Fläche. Nachweis, dass die durch congruente und symmetrische Wiederholungen des Minimalflächenstückes $M$ entstehende Minimalfläche $\mathfrak{M}$ im Allgemeinen die Eigenschaft hat, dass in einen endlichen Theil des Raumes eine unendliche Anzahl von Wiederholungen des Flächenstückes $M$ eintritt.

Zufolge des früher angeführten Satzes über die analytische Fortsetzbarkeit einer Minimalfläche über jede auf derselben liegende Gerade hinaus lässt sich das Minimalflächenstück $M_8$ über jede der acht zu seiner Begrenzung gehörenden Geraden $z = \pm \mathfrak{H}$, $x \pm \mathfrak{R} = \pm y$ hinaus analytisch fortsetzen. Bei der $180^0$ betragenden Drehung des Flächenstückes $M$ um jede dieser Geraden nimmt dasselbe eine Lage an, welche aus der ursprünglichen auch durch eine einfache Translationsbewegung hervorgehen kann. Die zu diesen Ueberführungen erforderlichen Translationen sind nach Grösse und Richtung durch die vier Seitenkanten einer geraden, vierseitigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche dargestellt, deren Spitze im Nullpunkte des gewählten Coordinatensystemes, deren Basis in der Ebene $z = 2\mathfrak{H}$ liegt. Die Seiten des die Basis bildenden Quadrates haben die Länge $2\mathfrak{R}$ und sind bezüglich der $x$- und der $y$-Axe des Coordinatensystemes parallel; die vier Ecken desselben sind diejenigen Punkte, welche bei der Translation dem mit dem Nullpunkte des Coordinatensystemes zusammenfallenden Punkte des Flächenstückes $M_8$ entsprechen.

Im Interesse einer kurzen Darstellungsweise soll jede Strecke, welche Grösse und Richtung einer Translation bezeichnet, durch welche eine periodische Minimalfläche wieder in sich selbst übergeht, als eine Periode der betreffenden Fläche bezeichnet werden.

Aus dem Bemerkten geht hervor, dass die Fläche $\mathfrak{M}$, welche

durch analytische Fortsetzung des Minimalflächenstückes $M_8$ entsteht, eine den unendlichen Raum erfüllende periodische Minimalfläche ist.

Die vier Perioden der Fläche, welche durch die Seitenkanten der beschriebenen Pyramide dargestellt werden, lassen sich auf drei untereinander unabhängige Perioden zurückführen: Eine der letzteren stimmt überein mit einer beliebig aus der Zahl der vier vorigen zu wählenden Periode; die beiden andern Perioden haben die Länge $2\mathfrak{R}$ und fallen ihrer Richtung nach beziehlich mit der $x$- und der $y$-Axe des gewählten Coordinatensystemes zusammen.

Ausser diesen drei von einander unabhängigen Perioden besitzt die Fläche noch zwei andere Perioden, welche sich nicht aus den schon genannten ableiten lassen. Man erhält dieselben, wenn man berücksichtigt, dass die Ebenen geodätischer Krümmungslinien einer Minimalfläche Symmetrieebenen für dieselbe sind, durch analytische Fortsetzung des Flächenstückes $M_8$ über die dasselbe begrenzenden ebenen Krümmungscurven. Die zwei auf solche Weise sich ergebenden, von einander unabhängigen, einfachen Perioden der betrachteten Fläche fallen der Richtung nach beziehungsweise mit den Richtungen der $x$- und der $y$-Axe des Coordinatensystemes zusammen und haben beide die Länge $2\mathfrak{A}$. Es besitzt daher die betrachtete Fläche sowohl in der Richtung der $x$-Axe wie in der der $y$-Axe zwei von einander unabhängige Perioden von der Länge $2\mathfrak{R}$ und $2\mathfrak{A}$. So lange also nicht die ausdrückliche Voraussetzung gemacht wird, dass die Strecken $2\mathfrak{R}$ und $2\mathfrak{A}$ ein rationales Verhältnis haben, lassen sich aus diesen Perioden der Fläche Perioden derselben von beliebiger Kleinheit zusammensetzen und man erhält so den Satz:

Im Allgemeinen hat die durch congruente und symmetrische Wiederholungen des Flächenstückes $M$ entstehende Minimalfläche $\mathfrak{M}$ die Eigenschaft, dass in einen endlichen Theil des Raumes eine unendliche Anzahl von Wiederholungen des Flächenstückes $M$ eintritt.

Auf der durch analytische Fortsetzung des Minimalflächenstückes $M$ entstandenen Minimalfläche $\mathfrak{M}$, welche sich in der Richtung aller drei Coordinatenaxen ins Unendliche erstreckt, liegen unendlich viele unendlich lange gerade Linien in Ebenen, welche der Ebene $z = 0$ parallel sind, und unendlich viele geodätische Krümmungslinien, deren Ebenen beziehungsweise den Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ parallel sind.

## Capitel V.

## Erörterung einiger einfacher Eälle, welche sich durch specielle Verfügungen über die Werthe der Parameter $\mathfrak{r}$ und $\Phi$ der Function $\mathfrak{F}(s)$ ergeben.

Zum Schlusse dieser die Gestalt der Fläche $\mathfrak{M}$ betreffenden Untersuchung sollen einige einfache Fälle erörtert werden, welche sich durch specielle Verfügung über die Werthe der Parameter $\mathfrak{r}$ und $\Phi$ der Function $\mathfrak{F}(s)$ ergeben. Dieselben haben vielleicht deshalb einiges Interesse, weil man bei der Behandlung derselben bemerkt, dass eine Anzahl schon seit längerer Zeit untersuchter Minimalflächen als specielle Fälle der hier betrachteten Minimalfläche angesehen werden können.

Es sollen im Folgenden die Bezeichnungen $M$, $M_2$, $M_3$, . . . $S$, $S_2$, $S_3$ . . . . . auch für diejenigen Flächenstücke gebraucht werden, in welche die bisher mit diesen Bezeichnungen versehenen Flächenstücke, beziehungsweise deren conforme Abbildungen auf die $s$-Ebene durch specielle Verfügung über die Werthe der Parameter $\mathfrak{r}$ und $\Phi$ übergehen. Nur da, wo Missverständnisse möglich sein würden, sollen die zu dem betreffenden Flächenstücke, beziehungsweise zu seiner conformen Abbildung gehörenden Parameterwerthe bei der Benennung desselben der letzteren hinzugefügt werden.

### 1.

### Betrachtung der Fälle, für welche $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$, $\Phi = 0$ und $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$, $\Phi = \frac{1}{4}\pi$ ist.

Es werde zunächst dem Parameter $\Phi$ der Function

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{\sqrt{(s^4 - \mathfrak{s}_4)(s^4 - \mathfrak{s}_1^4)}} = \frac{1}{\sqrt{s^8 - 2s^4\mathfrak{r}^4 \cos 4\Phi + \mathfrak{r}^8}}$$

der Werth Null beigelegt. Dadurch nehmen, unter Beibehaltung des gewählten rechtwinkligen Coordinatensystemes die Gleichungen (2) für die Coordinaten eines Punktes der zu der Function $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden Minimalfläche die Form an:

$$x = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{(1-s^2)ds}{\mathfrak{r}^4 - s^4} + \frac{1}{2}\int_0^{s_1} \frac{(1-s_1^2)\,ds_1}{\mathfrak{r}^4 - s_1^4},$$

$$y = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{i(1+s^2)ds}{\mathfrak{r}^4 - s^4} - \frac{1}{2}\int_0^{s_1} \frac{i(1+s_1^2)\,ds_1}{\mathfrak{r}^4 - s_1^4},$$

$$z = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{2s\,ds}{\mathfrak{r}^4 - s^4} + \frac{1}{2}\int_0^{s_1} \frac{2s_1\,ds_1}{\mathfrak{r}^4 - s_1^4}.$$

Diese Gleichungen gestatten folgende Umformung:

$$x = -\frac{1-\mathfrak{r}^2}{8\mathfrak{r}^3}\log\frac{(\mathfrak{r}-s)(\mathfrak{r}-s_1)}{(\mathfrak{r}+s)(\mathfrak{r}+s_1)} + i\frac{1+\mathfrak{r}^2}{8\mathfrak{r}^3}\log\frac{(\mathfrak{r}-si)(\mathfrak{r}-s_1 i)}{(\mathfrak{r}+si)(\mathfrak{r}+s_1 i)},$$

$$y = -\frac{1-\mathfrak{r}^2}{8\mathfrak{r}^3}\log\frac{(\mathfrak{r}-si)(\mathfrak{r}+s_1 i)}{(\mathfrak{r}+si)(\mathfrak{r}-s_1 i)} - i\frac{1+\mathfrak{r}^2}{8\mathfrak{r}^3}\log\frac{(\mathfrak{r}-s)(\mathfrak{r}+s_1)}{(\mathfrak{r}+s)(\mathfrak{r}-s_1)},$$

$$z = \frac{1}{4\mathfrak{r}^2}\log\frac{(\mathfrak{r}^2+s^2)(\mathfrak{r}^2+s_1^2)}{(\mathfrak{r}^2-s^2)(\mathfrak{r}^2-s_1^2)}.$$

Im Punkte $s = 0$, welcher der Ecke $A$ des Flächenstückes $M$ entspricht, sind allen Logarithmen ihre Hauptwerthe beizulegen. Einem einblättrigen Bereiche $S_2$ der $s$-Ebene, in welchem $x$ positiv, $|y| \leqq x$ ist, und welcher längs der Axe des Reellen vom Punkte $s = \mathfrak{r}$ bis zum Punkte $s = \infty$ aufgeschnitten zu denken ist, entspricht ein Minimalflächenstück $M_2$, für welches

$$\mathfrak{H} = \infty,\ \mathfrak{N} = \infty,\ \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{N}} = \frac{2\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}^2},\ 2\mathfrak{A} = \frac{1+\mathfrak{r}^2}{2\mathfrak{r}^3}\cdot\pi$$

ist. Seine Begrenzung wird von zwei Geraden und zwei Ebenen gebildet; die Geraden haben die Länge $\mathfrak{A}\sqrt{2}$, gehen vom Coordinatenanfangspunkte aus und haben die Gleichungen $z = 0$, $x = \pm y$, ($x$ positiv); die Gleichungen der beiden Ebenen sind $y = \pm\mathfrak{A}$.

Zwischen diesen Ebenen erstreckt sich das Flächenstück ins Unendliche, und zwar so, dass es völlig innerhalb eines vierseitigen, schiefen, unendlich hohen Prismas mit rechteckiger Basis liegt. Die Gesammtheit der im Innern und auf der Begrenzung der Grundfläche dieses Prismas liegenden Punkte genügt den Bedingungen

$$z = 0,\ 0 \leqq x \overline{\gtrless} \mathfrak{A},\ -\mathfrak{A} \leqq y \overline{\gtrless} +\mathfrak{A}.$$

Die Seiten des Prismas sind einerseits von Stücken der beiden Ebenen $y = \pm\mathfrak{A}$, andererseits von zwei parallelen ebenen Streifen gebildet, welche zwischen diesen Ebenen liegen, auf denselben senkrecht stehen und gegen die Ebene $z = 0$ den Neigungswinkel $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,\mathfrak{r}$ besitzen. Für $\lim \begin{Bmatrix} x = \infty \\ z = \infty \end{Bmatrix}$ nähert sich die Gestalt des Flächenstückes $M_2$ unbegrenzt der eines ebenen Streifens, der den genannten beiden Streifen parallel ist.

Der dem Punkte $s = \mathfrak{r}$ entsprechende Mittelpunkt des Flächenstückes $M$ ist ins Unendliche gerückt, und es entspricht daher in gewissem Sinne das für den Fall $\Phi = 0$ mit $M_2$ bezeichnete Flächenstück der Hälfte des im allgemeinen Falle mit dem Buchstaben $M_2$ bezeichneten Flächenstückes.

Die Fläche, welche durch analytische Fortsetzung des Flächen-

stückes $M_2$ für $\Phi = 0$ entsteht, ist periodisch in der Richtung der $x$- und der $y$-Axe des Coordinatensystems. In beiden Richtungen ist der Werth der Periode gleich $\frac{1+\mathfrak{r}^2}{2\mathfrak{r}^3}\cdot\pi$.

Legt man zweitens dem Parameter $\Phi$ der Function $\mathfrak{F}(s)$ den Werth $\frac{1}{2}\pi$ bei, so nehmen die Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes der zu dieser Function $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden Minimalfläche die Form an:

$$x = \tfrac{1}{2}\int_0^s \frac{(1-s^2)\,ds}{\mathfrak{r}^4+s^4} + \tfrac{1}{2}\int_0^{s_1} \frac{(1-s_1^2)\,ds_1}{\mathfrak{r}^4+s_1^4},$$

$$y = \tfrac{1}{2}i\int_0^s \frac{(1+s^2)\,ds}{\mathfrak{r}^4+s^4} - \tfrac{1}{2}i\int_0^{s_1} \frac{(1+s_1^2)\,ds_1}{\mathfrak{r}^4+s_1^4},$$

$$z = \tfrac{1}{2}\int_0^s \frac{2s\,ds}{\mathfrak{r}^4+s^4} + \tfrac{1}{2}\int_0^{s_1} \frac{2s_1\,ds_1}{\mathfrak{r}^4+s_1^4}.$$

Diese Gleichungen gestatten folgende Umformung:

$$x = \frac{1-\mathfrak{r}^2 i}{8\mathfrak{r}^3\sqrt{-i}}\log\frac{(\mathfrak{r}+s\sqrt{-i})(\mathfrak{r}+s_1\sqrt{-i})}{(\mathfrak{r}-s\sqrt{-i})(\mathfrak{r}-s_1\sqrt{-i})} + \frac{1+\mathfrak{r}^2 i}{8\mathfrak{r}^3\sqrt{i}}\log\frac{(\mathfrak{r}+s\sqrt{i})(\mathfrak{r}+s_1\sqrt{i})}{(\mathfrak{r}-s\sqrt{i})(\mathfrak{r}-s_1\sqrt{i})},$$

$$y = i\left\{\frac{1+\mathfrak{r}^2 i}{8\mathfrak{r}^3\sqrt{-i}}\log\frac{(\mathfrak{r}+s\sqrt{-i})(\mathfrak{r}-s_1\sqrt{-i})}{(\mathfrak{r}-s\sqrt{-i})(\mathfrak{r}+s_1\sqrt{-i})} + \frac{1-\mathfrak{r}^2 i}{8\mathfrak{r}^3\sqrt{i}}\log\frac{(\mathfrak{r}+s\sqrt{i})(\mathfrak{r}-s_1\sqrt{i})}{(\mathfrak{r}-s\sqrt{i})(\mathfrak{r}+s_1\sqrt{i})}\right\},$$

$$z = \frac{1}{4i\mathfrak{r}^2}\log\frac{(\mathfrak{r}^2+is^2)(\mathfrak{r}^2+is_1^2)}{(\mathfrak{r}^2-is^2)(\mathfrak{r}^2-is_1^2)}.$$

In diesen Formeln ist, wie überall im Folgenden $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ zu setzen. Dem einblättrigen Bereiche $S_2$ der $s$-Ebene, in welchem $x$ positiv, $|y| \lesseqgtr x$ ist, entspricht ein Minimalflächenstück $M_2$, für welches

$$2\mathfrak{A} = \infty,\quad \mathfrak{H} = \frac{\pi}{2\mathfrak{r}^2},\quad \mathfrak{R} = \frac{1-\mathfrak{r}^2}{4\mathfrak{r}^3}\cdot\pi\sqrt{2}$$

ist. Dasselbe wird begrenzt von vier Geraden. Zwei derselben liegen in der Ebene $z = 0$, gehen durch den Punkt $x = y = 0$ und haben die Gleichungen $x = \pm y$, ($x$ positiv). Die beiden anderen Geraden gehen durch den Punkt $x = \mathfrak{R}$, $y = 0$, $z = \mathfrak{H}$ und sind beziehungsweise den genannten Geraden parallel. Alle vier Geraden sind unendlich lang. Das Flächenstück $M_2$ liegt völlig zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = \mathfrak{H}$, die Ebene $y = 0$ schneidet dasselbe in einer ebenen Krümmungslinie, und ist daher eine Symmetrieebene desselben. Für $\lim x = \pm y = \infty$ nähert sich die Gestalt des

Flächenstückes $M_2$ unbegrenzt derjenigen der beiden ebenen Streifen, welche durch je zwei parallele Geraden der Begrenzung des Flächenstückes $M_2$ hindurch gelegt werden können. Die den Punkten $s = \mathfrak{r}\sqrt{\pm i}$ entsprechenden Mittelpunkte der beiden Flächenstücke $M$ und $M'$, welche das Flächenstück $M_2$ bilden, sind ins Unendliche gerückt und es entspricht daher für den Fall $\Phi = \frac{1}{4}\pi$ das Flächenstück $M_2$ in gewissem Sinne der Hälfte des im allgemeinen Falle mit dem Buchstaben $M_2$ bezeichneten Flächenstückes. Der Bereich der $s$-Ebene, welcher einem Flächenstücke $M_8$ entspricht, das durch analytische Fortsetzung aus dem Flächenstücke $M_2$ hervorgeht, ist die einfach bedeckte unendliche Ebene, welche längs der Geraden $s = \pm r\sqrt{\pm i}$ von den vier Punkten $\pm \mathfrak{r}\sqrt{\pm i}$ bis ins Unendliche aufgeschnitten zu denken ist. — Die durch analytische Fortsetzung des Flächenstückes $M_2 (\Phi = \frac{1}{4}\pi)$ entstehende Minimalfläche besitzt drei von einander unabhängige Perioden. Zwei derselben sind ihrer Richtung nach beziehungsweise der $x$- und der $y$-Axe des gewählten Coordinatensystemes parallel und haben beide die Länge $\frac{1-\mathfrak{r}^2}{2\mathfrak{r}^3}\pi\sqrt{2}$.
Die dritte Periode ist ihrer Richtung und Grösse nach durch ihre Componenten, genommen in den Richtungen der drei Coordinatenaxen, so bestimmt, dass dieselben beziehlich die Werthe

$$x = y = \frac{1-\mathfrak{r}^2}{4\mathfrak{r}^3}\pi\sqrt{2}, \quad z = \frac{\pi}{\mathfrak{r}^2}$$

besitzen.

Die Fläche $M(\Phi = \frac{1}{4}\pi)$ ist die Ossian-Bonnet'sche Biegungsfläche der Fläche $M(\Phi = 0)$, d. h. es ist möglich, durch continuirliche Biegung die Fläche $M(\Phi = 0)$ ohne Dehnung und Zerreissung derart in die Gestalt der Fläche $M(\Phi = \frac{1}{4}\pi)$ überzuführen, dass die Krümmungslinien und Asymptotenlinien der ersten Fläche beziehungsweise in die Asymptotenlinien und Krümmungslinien der zweiten Fläche übergehen.

Der analytische Ausdruck für die Bedingung, dass eine Minimalfläche $M_\beta$ die Ossian-Bonnet'sche Biegungsfläche einer andern Minimalfläche $M_\alpha$ sei, ist, dass zwischen den zu diesen Minimalflächen im erklärten Sinne gehörenden Functionen $\mathfrak{F}_\alpha(s)$ und $\mathfrak{F}_\beta(s)$ die Beziehung besteht

$$\mathfrak{F}_\beta(s) = i\mathfrak{F}_\alpha(s). \quad (\text{„Miscellen" pag. 287}).$$

Ersetzt man in den drei Ausdrücken für die Coordinaten eines Punktes der Minimalfläche $M(\Phi = 0)$ die Function $\mathfrak{F}(s)$ durch die Function $i\mathfrak{F}(s)$, führt unter den Integralzeichen eine neue Integrationsvariable durch die Substitution $s = s^*\sqrt{-i}$ ein und geht end-

lich zu einem Coordinatensysteme über, welches gegen das bisherige unter einem Winkel von 45° in der Richtung von der positiven $y$-Axe zur positiven $x$-Axe gedreht ist, so gehen die genannten Ausdrücke identisch in diejenigen für die Coordinaten eines Punktes der Minimalfläche $M(\Phi = \frac{1}{4}\pi)$ über. Damit ist also nachgewiesen, dass die Fläche $M(\Phi = \frac{1}{4}\pi)$ die Ossian-Bonnet'sche Biegungsfläche der Fläche $M(\Phi = 0)$ ist.

## 2.

## Betrachtung der Fälle, für welche $\mathfrak{r} = 1$, $\Phi = 0$ und $\mathfrak{r} = 1$, $\Phi = \frac{1}{4}\pi$ ist.

Durch weitere Specialisirung gelangt man zu denjenigen beiden Flächen, in welche die bisher betrachteten beiden übergehen, wenn man dem Parameter $\mathfrak{r}$ den Werth 1 beilegt.

Die Coordinaten eines Punktes der Fläche $M(\Phi = 0, \mathfrak{r} = 1)$ sind dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \Re\int_0^s \frac{ds}{1+s^2} = \tfrac{1}{4} i \log \frac{(1-si)(1-s_1 i)}{(1+si)(1+s_1 i)},$$

$$y = \Re\int_0^s \frac{i\,ds}{1-s^2} = -\tfrac{1}{4} i \log \frac{(1-s)(1+s_1)}{(1+s)(1-s_1)},$$

$$z = \Re\int_0^s \frac{2s\,ds}{1-s^4} = \tfrac{1}{4} \log \frac{(1+s^2)(1+s_1^2)}{(1-s^2)(1-s_1^2)}.$$

Die durch diese Gleichungen dargestellte Minimalfläche ist dieselbe, wie die, zu welcher Herr H. A. Schwarz auf pag. 87 des Nachtrags zur „Preisschrift" auf anderem Wege gelangt, und deren Gleichung bereits Herr Scherk in der einfachen Form

$$e^z = \frac{\cos x}{\cos y}$$

aufgestellt hat. Bei der letzteren Darstellung ergeben sich die Dimensionen der Fläche doppelt so gross wie bei der obigen.

Das Prisma mit rechtwinkliger Basis, in dessen Innerem, wie früher erwähnt, das ganze Flächenstück $M_2$ liegt, geht über in ein gerades Prisma, dessen Kanten der $z$-Axe parallel sind. Die Punkte, welche dem Inneren und der Begrenzung der Basis dieses Prismas angehören, genügen den Bedingungen $z = 0$, $0 \leqq x \lesseqgtr \mathfrak{A}$, $-\mathfrak{A} \leqq y \lesseqgtr +\mathfrak{A}$. Der Grösse $\mathfrak{A}$ ist der Werth $\frac{1}{2}\pi$ beizulegen. Für $\lim z = \infty$ geht die Gestalt des Flächenstückes $M_2$ über in diejenige des ebenen Streifens, welchen die Ebenen $y = \pm\mathfrak{A}$ aus der Ebene $x = \frac{1}{2}\mathfrak{A}$

herausschneiden. Dieser ebene Streifen schneidet den im Endlichen liegenden Theil des Flächenstückes $M_2$ längs zweier geraden Linien, welche der $z$-Axe parallel sind. Es entspricht daher dem Inneren und der Begrenzung des Einheitskreises der $s$-Ebene ein einfach zusammenhängendes, in den Richtungen der positiven und der negativen $z$-Axe sich ins Unendliche erstreckendes Minimalflächenstück, welches von der Ebene $z = 0$ in zwei geraden Asymptotenlinien geschnitten wird und von vier der $z$-Axe parallelen Geraden begrenzt wird, welche paarweise in den beiden Ebenen $x = \pm y$ liegen und von der $z$-Axe den Abstand $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$ besitzen.

Als Abbildung der Begrenzung eines solchen Minimalflächenstückes und der beiden auf demselben liegenden, durch den Nullpunkt des Coordinatensystemes gehenden geraden Asymptotenlinien kann man die a. a. O. Taf. V, Fig. 26 gezeichnete Figur ansehen, wenn man sich in derselben die vertical gezeichneten Geraden unendlich lang vorstellt.

Die beiden unabhängigen Perioden der durch analytische Fortsetzung des Minimalflächenstückes $M(\Phi = 0, \mathfrak{r} = 1)$ entstehenden Minimalfläche fallen ihrer Richtung nach mit der $x$- und der $y$-Axe des gewählten Coordinatensystemes zusammen und haben beide die Grösse $\pi$.

Die Coordinaten eines Punktes des Minimalflächenstückes $M(\Phi = \frac{1}{4}\pi, \mathfrak{r} = 1)$ sind dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \Re\int_0^s \frac{(1-s^2)\,ds}{1+s^4} = \frac{1}{4}\log\frac{(1+s\sqrt{i})(1+s_1\sqrt{-i})}{(1-s\sqrt{i})(1-s_1\sqrt{-i})},$$

$$y = \Re\int_0^s \frac{i(1+s^2)\,ds}{1+s^4} = \frac{1}{4}\log\frac{(1-s\sqrt{-i})(1-s_1\sqrt{i})}{(1+s\sqrt{-i})(1+s_1\sqrt{i})},$$

$$z = \Re\int_0^s \frac{2s\,ds}{1+s^4} = \frac{1}{4}i\log\frac{(1+is^2)(1+is_1^2)}{(1-is^2)(1-is_1^2)}.$$

Die durch diese Gleichungen dargestellte Minimalfläche ist dieselbe, zu welcher Herr H. A. Schwarz a. a. O. pag. 92 auf anderem Wege gelangt, und deren Gleichung bereits Scherk in der Form

$$4\sin z = (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})$$

aufgestellt hat. Die Gestalt der Fläche ist von Herrn Van der Mensbrugghe zuerst untersucht worden. Das Coordinatensystem, auf welches bei der Darstellung von Scherk die Fläche bezogen

wird, ist gegen das in dieser Abhandlung benutzte um die $z$-Axe durch einen Winkel von 45° gedreht, und die Dimensionen der Fläche sind doppelt so gross, wie diejenigen, welche sich aus den Ausdrücken für die Coordinaten eines Punktes derselben bei der in dieser Abhandlung angewandten Darstellungsweise ergeben.

Für lim $x = \pm y = \infty$ nähert sich die Gestalt des Flächenstückes $M_2$ unbegrenzt derjenigen der beiden ebenen Streifen, welche die Ebenen $z = 0$ und $z = \mathfrak{H}$ aus den Ebenen $x = \pm y$ herausschneiden. Der Grösse $\mathfrak{H}$ ist der Werth $\frac{1}{2}\pi$; der Grösse $\mathfrak{R}$ ist der Werth Null beizulegen. Dem Quadranten der $s$-Ebene, in welchem $x$ positiv, $|y| \leqq x$ ist, entspricht demnach ein einfach zusammenhängendes, in den Richtungen der Geraden $x = \pm y$, ($x$ positiv) sich ins Unendliche erstreckendes Minimalflächenstück $M_2$. Dasselbe ist begrenzt von den vier Geraden, welche die Schnittlinien der Ebenen $x = \pm y$ ($x$ positiv) mit den Ebenen $z = 0$ und $z = \mathfrak{H}$ sind. Die Ebene $z = \frac{1}{2}\mathfrak{H}$ schneidet das Minimalflächenstück $M_2$ in einer ebenen Krümmungslinie, welcher in dem betrachteten Quadranten der $s$-Ebene der in demselben liegende vierte Theil des Einheitskreises entspricht.

Als Abbildung der Begrenzung eines solchen Flächenstückes kann man die a. a. O. Taf. V, Fig. 31 gezeichnete Figur ansehen, wenn man sich die vier paarweise in den Ebenen $z = 0$ und $z = \mathfrak{H}$ liegenden Geraden als unendlich lang vorstellt.

Die durch analytische Fortsetzung des Flächenstückes $M(\varPhi = \frac{1}{4}\pi$, $\mathfrak{r} = 1)$ entstehende Minimalfläche besitzt nur eine Periode. Die Richtung derselben fällt mit derjenigen der $z$-Axe des Coordinatensystemes zusammen, ihre Länge hat den Werth $\pi$.

## 3.

### Betrachtung des Falles, für welchen $\mathfrak{r} = 1$, $\varPhi = \varPhi$ ist.

Die beiden Minimalflächenstücke $M(\varPhi = 0,\ \mathfrak{r} = 1)$ und $M(\varPhi = \frac{1}{4}\pi,\ \mathfrak{r} = 1)$ können als Grenzfälle für diejenige Schaar von Minimalflächen betrachtet werden, für welche der Parameter $\mathfrak{r}$ den Werth 1 hat und der Parameter $\varPhi$ einen der Werthe des Intervalles $0 < \varPhi < \frac{1}{4}\pi$ annimmt. Die Minimalfläche $M(\mathfrak{r} = 1, \varPhi = \varPhi)$ stimmt mit derjenigen überein, welche a. a. O. pag. 91 erwähnt wird, und von welcher gesagt wird:

„Es entspricht . . . . einem Quadranten der Ebene $s$, in welchem $\xi$ positiv und $\eta^2 \leqq \xi^2$ ist, wenn derselbe längs der Peripherie des Einheitskreises von den Windungspunkten aus aufgeschnitten

wird, ein von einem geradlinigen räumlichen Sechsseit begrenzter Theil einer Minimalfläche. Taf. V. Fig. 31. Eine Vereinigung zweier solcher Sechsseite zeigt Fig. 30."

Diese Fläche besitzt drei Perioden, deren Richtungen mit denen der drei Axen des gewählten Coordinatensystemes zusammenfallen. Die Periode der Fläche in der Richtung der $z$-Axe hat den Werth $2\mathfrak{H}$, die beiden andern Perioden haben beide den Werth $2\mathfrak{A}$. Dabei ist

$$2\mathfrak{H} = 4\int_0^1 \frac{2r\,dr}{+\sqrt{r^8-2r^4\cos 4\Phi+1}} \text{ und } 2\mathfrak{A} = \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{(1+r^2)\,dr}{+\sqrt{r^8+2r^4\cos 4\Phi+1}}.$$

Beide Integrationen sind längs der die Punkte $r = 0$ und $r = 1$ verbindenden Geraden auszuführen.

Dem Inneren und der Begrenzung des Einheitskreises der $s$-Ebene entspricht ein einfach zusammenhängendes Minimalflächenstück, welches von vier ebenen Krümmungslinien in den Ebenen $z = \pm\frac{1}{2}\mathfrak{H}$ und vier der $z$-Axe parallelen Geraden begrenzt wird, welche letzteren in den Ebenen $x = \pm y$ liegen, und welche von der $z$-Axe den Abstand $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{A}$ besitzen.

Mit anderen Worten: Das Flächenstück $M_8$, welches einem Bereiche $S_8$ entspricht, der aus dem bei der Untersuchung des allgemeinen Falles beschriebenen dadurch hervorgeht, dass dem Parameter $\mathfrak{r}$ der Werth 1 beigelegt wird, hat folgende Eigenschaften: Die fünf Ebenen $z = 0$, $z = \pm\mathfrak{H}$, $x = \pm y$ schneiden dasselbe in zehn geraden Asymptotenlinien, die acht Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $x = \pm\mathfrak{A}$, $y = \pm\mathfrak{A}$, $z = \pm\frac{1}{2}\mathfrak{H}$ schneiden dasselbe in vierzehn ebenen Krümmungslinien.

Für den hier betrachteten Fall, in welchem der Parameter $\mathfrak{r}$ der Function $\mathfrak{F}(s)$ den Werth 1 hat, ist die Gleichung des zu dieser Function gehörenden Minimalflächenstückes $M$ durch elliptische Functionen der Coordinaten rational ausdrückbar, und zwar kann derselben die Form

$$\lambda \cdot \mu \cdot \nu = 1$$

beigelegt werden, wo $\lambda$, $\mu$, $\nu$ elliptische Functionen je einer der drei Coordinaten bedeuten. (Fortges. Untersuch. pag. 14).

4.

### Betrachtung der Fälle, für welche $\mathfrak{r} = 0$, $\Phi = \Phi$ und $\mathfrak{r} = \infty$, $\Phi = \Phi$ ist.

Es sollen endlich diejenigen speciellen Fälle betrachtet werden, welche sich ergeben, wenn man dem Parameter $\mathfrak{r}$ die Werthe 0 und $\infty$ beilegt.

Setzt man $\mathfrak{r} = 0$, führt in den Gleichungen (1) für die Coordinaten eines Punktes der Minimalfläche eine neue Integrationsvariable durch die Substitution $s^* = \frac{1}{s}$ ein, und bezeichnet dieselbe schliesslich wieder mit dem Buchstaben $s$, so gehen die Gleichungen (1) in die folgenden über:

$$x = \Re\int(1-s^2)\,ds, \quad y = \Re\int i(1+s^2)\,ds, \quad z = \Re\int 2s\,ds.$$

Zu denselben Formeln gelangt man, wenn man mit Hilfe der Gleichungen

$$x' = \mathfrak{r}^4 \cdot x, \quad y' = \mathfrak{r}^4 \cdot y, \quad z' = \mathfrak{r}^4 \cdot z$$

zu einem neuen Coordinatensysteme übergeht und gleichzeitig in den Gleichungen (1) dem Parameter $\mathfrak{r}$ den Werth $\infty$ beilegt.

Diese Formeln stellen die Ausdrücke für die Coordinaten eines Punktes einer algebraischen Minimalfläche neunten Grades dar, deren Gleichung Herr Enneper aufgestellt hat. (Zeitschrift für Mathematik, Bd. IX, pag. 108, 1864.) Die zu dieser Minimalfläche gehörende Function $\mathfrak{F}(s)$ reducirt sich auf eine reelle Constante, welche bei der hier angewandten Darstellung den Werth 1 hat. In den „Miscellen" wird darauf hingewiesen, dass die beiden Schaaren von Krümmungslinien dieser Minimalfläche von ebenen Curven dritten Grades gebildet werden, während die isogonalen Trajectorien derselben Raumcurven dritten Grades sind. Ferner wird a. a. O. gezeigt, dass diese Fläche die Eigenschaft hat, auf stetige Weise in sich selbst verbiegbar zu sein.

Führt man endlich in den Gleichungen (1) eine neue Integrationsvariable durch die Substitution $s = \mathfrak{r}s^*$ ein, welche nach erfolgter Substitution wieder mit dem Buchstaben $s$ bezeichnet werden möge, und geht man zu einem neuen Coordinatensysteme durch die Gleichungen

$$x'' = \mathfrak{r}^3 \cdot x, \quad y'' = \mathfrak{r}^3 \cdot y, \quad z'' = \mathfrak{r}^3 \cdot z$$

über, so nehmen die Gleichungen für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der betrachteten Minimalfläche die Form an

$$x'' = \Re\int\frac{(1-\mathfrak{r}^2 s^2)\,ds}{\sqrt{s^8-2s^4\cos 4\Phi+1}},\quad y'' = \Re\int\frac{i(1+\mathfrak{r}^2 s^2)\,ds}{\sqrt{s^8-2s^4\cos 4\Phi+1}},$$

$$z'' = \mathfrak{r}\cdot\Re\int\frac{2s\,ds}{\sqrt{s^8-2s^4\cos 4\Phi+1}}.$$

Legt man in diesen Formeln dem Parameter $\mathfrak{r}$ den Werth Null bei, so ergiebt sich, dass bei dieser Verfügung über den Werth des Parameters $\mathfrak{r}$ die Ebene $z = 0$ als specieller Fall der durch die Gleichungen (1) analytisch dargestellten Minimalfläche angesehen werden kann.

---

## Cap. VI.

### Nachweis, dass das Flächenstück *M* das kleinste, einfach zusammenhängende Flächenstück ist, welches längs ebener Curven in zwei gegebenen parallelen Ebenen endigt und dessen vollständige Begrenzung von diesen und zwei gegebenen parallelen Geraden gebildet wird, welche gegen die Ebenen unter Winkeln von 45° geneigt sind.

Der Nachweis, dass das Flächenstück $M$ den kleinsten Flächeninhalt unter allen einfach zusammenhängenden Flächenstücken besitzt, welche längs zwei in gegebenen parallelen Ebenen liegenden Curven endigen und deren vollständige Begrenzung von diesen Curven und zwei gegebenen parallelen Geraden gebildet wird, welche gegen die erwähnten Ebenen unter Winkeln von 45° geneigt sind, kann durch ein Verfahren geführt werden, welches demjenigen entspricht, das Herr H. A. Schwarz in der „Festschrift" veröffentlicht hat.

Man betrachte die Schaar von Minimalflächenstücken, mit welchen der Reihe nach das Minimalflächenstück $M$ zusammenfällt, wenn man dasselbe in der Richtung sowohl der positiven wie der negativen $x$-Axe des gewählten Coordinatensystemes parallel mit sich selbst fortbewegt. Diese Schaar erfüllt völlig einen in der Richtung der $x$-Axe beiderseits ins Unendliche sich erstreckenden prismatischen Raum, der von den Ebenen $z = 0$, $z = \mathfrak{H}$, $y = 0$, $y = -\mathfrak{A}$ begrenzt wird. Einen Theil dieses prismatischen Raumes begrenze man durch zwei Ebenen $x = \pm c$ derart, dass das ursprüngliche Flächenstück $M$ ganz im Innern des entstehenden, völlig begrenzten

prismatischen Raumes $R$ liegt. Man betrachte nunmehr irgend ein einfach zusammenhängendes Flächenstück $F'$, dessen vollständige Begrenzung gebildet wird von den beiden der Begrenzung des Flächenstückes $M$ angehörenden geraden Strecken und zwei den Ebenen $y = 0$ und $y = -\mathfrak{A}$ angehörenden Curven. Es soll vorausgesetzt werden, dass das Flächenstück $F'$ unter Festhaltung der beiden erwähnten geraden Strecken seiner Begrenzung durch Variation stetig in das Minimalflächenstück $M$ übergeführt werden kann; dabei soll jedoch die Variation der beiden ebenen Curven der Begrenzung des Flächenstückes $F'$ auf die Ebenen dieser Curven beschränkt sein. Für den Fall, dass Theile des Flächenstückes $F'$ ausserhalb des Raumes $R$ liegen, wird dasselbe von den Ebenen $z = 0$, $z = \mathfrak{H}$, $x = \pm c$, $y = 0$, $y = -\mathfrak{A}$ oder doch von einigen dieser Ebenen in ebenen, geschlossenen Curven geschnitten. Im allgemeinen Falle kann man also das Flächenstück $F'$ als zusammengesetzt ansehen erstens aus Theilen, welche im Innern des Raumes $R$ liegen, zweitens aus Theilen, welche ausserhalb desselben liegen, drittens aus solchen ebenen Flächenstücken, welche Theile der Begrenzung des Raumes $R$ bilden. Für die anzustellende Betrachtung lässt sich das Flächenstück $F'$ durch ein anderes Flächenstück $F$ ersetzen, welches hinsichtlich seiner Begrenzung gleichen Bedingungen genügt, wie das Flächenstück $F'$, welches aber nur aus Theilen besteht, die im Innern und auf der Begrenzung des Raumes $R$ liegen. Der Uebergang von der Fläche $F'$ zu dieser Fläche $F$ kann auf folgende Weise bewirkt werden: Die Ebene $z = \mathfrak{H}$ zerlegt den unendlichen Raum in zwei Bereiche. Der Raum $R$ befindet sich völlig in dem einen dieser Bereiche. Gehören nun zu dem Flächenstücke $F'$ Theile, welche in dem anderen Bereiche liegen, so ersetze man dieselben durch diejenigen ebenen Flächenstücke, welche durch orthogonale Projection der ersteren auf die Ebene $z = \mathfrak{H}$ entstehen. Es kann bei diesem Verfahren vorkommen, dass Theile der Ebene $z = \mathfrak{H}$ durch die Projectionen der erwähnten Flächenstücke mehrfach bedeckt werden; dieser Umstand ist jedoch für die anzuwendende Schlussweise bedeutungslos. Durch Wiederholung des beschriebenen Projectionsverfahrens in Bezug auf jede der den Raum $R$ begrenzenden Ebenen und für alle ausserhalb des Raumes $R$ liegenden Theile des Flächenstückes $F'$ erhält man das Flächenstück $F$. Dasselbe besteht demnach aus denjenigen Theilen des Flächenstückes $F'$, welche von vornherein im Innern und auf der Begrenzung des Raumes $R$ lagen, und aus denjenigen ebenen Stücken der Begrenzung des Raumes $R$, welche die ursprünglich ausserhalb desselben liegenden Theile des Flächenstückes $F'$ ersetzen. Das Flächenstück

$F$ hat seiner Entstehungsweise gemäss jedenfalls nicht grösseren Flächeninhalt als das Flächenstück $F'$.

Von dem Flächenstücke $F$ lässt sich zeigen, dass es grösseren Flächeninhalt besitzt, als das Minimalflächenstück $M$. Zu diesem Zwecke denke man sich das Minimalflächenstück $M$ in Flächenelemente $dM$ zerlegt und betrachte die Gesammtheit der durch die Begrenzung jedes dieser Elemente gelegten röhrenförmigen Flächen, welche die Minimalflächenstücke der betrachteten Schaar rechtwinklig durchschneiden. Jede dieser Flächen begrenzt auf allen Flächenstücken der betrachteten Schaar, welche von derselben durchschnitten werden, Flächenelemente von gleich grossem Flächeninhalt. Denn für jedes dieser Flächenstückchen ist die auf den Uebergang desselben in ein unendlich benachbartes, von derselben röhrenförmigen Fläche begrenztes, einer Fläche der Schaar angehörendes Flächenstückchen sich beziehende erste Variation gleich Null. („Festschrift“ pag. 6). Diejenigen dieser röhrenförmigen Flächen, welche Elemente des Flächenstückes $M$ einschliessen, deren theilweise Begrenzung von den in den Ebenen $y = 0$ und $y = -\mathfrak{A}$ liegenden Krümmungslinien desselben gebildet wird, sind in ihrer ganzen Erstreckung diesen Ebenen parallel. Die Gesammtheit der auf die angegebene Weise entstandenen röhrenförmigen Flächen wird durch die den Raum $R$ einschliessenden Ebenen theilweise begrenzt; dieselbe füllt einen zusammenhängenden Theil des Raumes $R$ lückenlos aus. Jede der röhrenförmigen Flächen schneidet aus der Fläche $F$ mindestens ein Flächenelement aus. Jedes derartig aus der Fläche $F$ herausgeschnittene Element derselben möge mit $dF_a$ bezeichnet werden. Im Allgemeinen besteht also der Inhalt des Flächenstückes $F$ aus dem Flächeninhalte $F_\iota$ eines von den Röhrenflächen nicht in Elemente zerlegten Theiles der Fläche $F$ und aus dem Flächeninhalte $F_a$, welcher die Gesammtheit der Flächenelemente $dF_a$ umfasst. Es ist also

$$F' \geqq F \geqq F_a.$$

Jedem der Flächenelemente $dF_a$ kann man ein in seiner Nähe liegendes Flächenelement $dM_a$ einer der Minimalflächen der betrachteten Schaar so zuordnen, dass beide Flächenelemente im Innern derselben röhrenförmigen Fläche liegen. Dasjenige Element $dM$ des ursprünglichen Minimalflächenstückes $M$, welches ebenfalls im Innern der genannten röhrenförmigen Fläche liegt, hat mit dem Flächenelemente $dM_a$ gleichen Flächeninhalt. Bedeutet $\omega$ den Neigungswinkel eines Elementes $dF_a$ gegen das demselben zugeordnete Element $dM_a$, wobei $\omega$ dem Intervalle $0 \leqq \omega \gtreqless \frac{1}{2}\pi$ angehört, so be-

steht die Beziehung

$$dM = \cos\omega \cdot dF_a.$$

Bezeichnet man den Inhalt des Minimalflächenstückes $M$ selbst mit $M$, so ergiebt sich aus dieser Formel durch Integration

$$M = \int \cos\omega \cdot dF_a$$

und also

$$M \leqq F_a.$$

Umsomehr ist mithin

$$M \leqq F',$$

und zwar kann der Fall der Gleichheit $M = F'$ nur dann eintreten, wenn das Flächenstück $F'$ in seiner ganzen Erstreckung mit dem Minimalflächenstücke $M$ zusammenfällt.

Hiermit ist also der Nachweis geführt, dass das Minimalflächenstück $M$ den kleinsten Flächeninhalt unter allen einfach zusammenhängenden Flächenstücken $F'$ besitzt, welche längs ebener Curven in zwei gegebenen parallelen Ebenen endigen und deren vollständige Begrenzung von diesen Curven und zwei gegebenen parallelen Geraden gebildet wird, welche gegen die genannten Ebenen unter Winkeln von 45° geneigt sind.

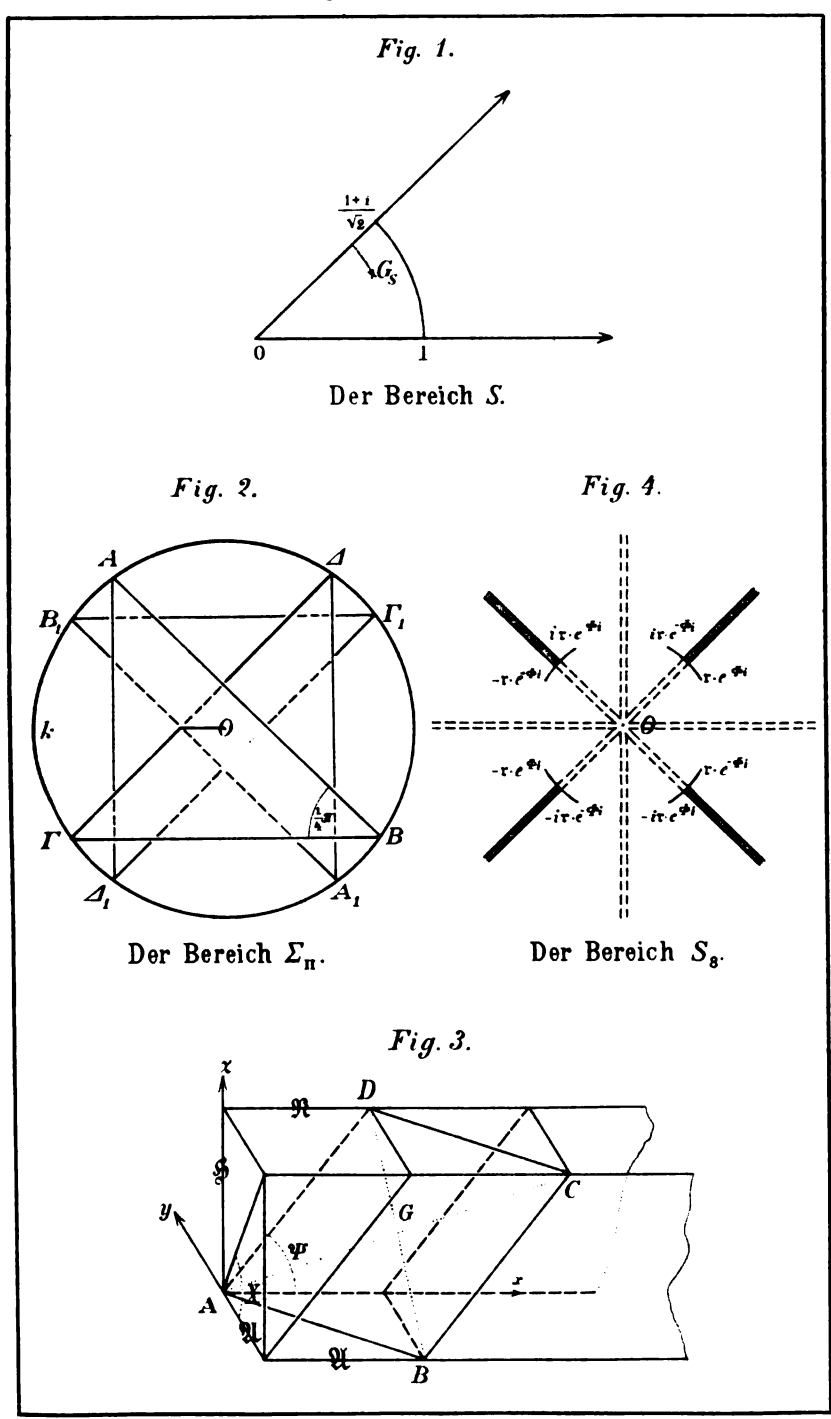
---

# Vita.

Geboren bin ich, Edward Felix Philipp Bohnert zu Hamburg am 20. Nov. 1862 als Sohn des Kaufmanns Ferd. Bohnert und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Karstens. Ich bin in dem evangelischen Bekenntnis erzogen. Meine Schulbildung habe ich auf der Gelehrtenschule des Johanneum zu Hamburg erhalten, welche ich Michaelis 1882 mit dem Zeugnis der Reife verliess, um mich auf der Universität Göttingen dem Studium der Mathematik und der Physik zu widmen. Am 11. Dec. 1886 habe ich das Examen pro facultate docendi vor der Königl. Wissenschaftl. Prüfungs-Kommission zu Göttingen bestanden, und von Ostern 1887 bis Ostern 1888 am Königl. Gymnasium zu Göttingen das pädagogische Probejahr abgeleistet. Der Militärpflicht habe ich während meiner Studienzeit als Einjährig-Freiwilliger im 2ten Hess.-Inf.-Reg. Nr. 82 genügt. Seit Ostern 1888 bin ich als wissenschaftlicher Lehrer am Rauhen Hause in Horn bei Hamburg beschäftigt.

Für die reiche Anregung und Belehrung, die ich während meiner Studienzeit empfangen habe, bin ich meinen hochverehrten Lehrern, den Herren Baumann, Ehlers, Enneper, Henle, C. Klein, F. Klein, Reinke, Riecke, Schering, Graf zu Solms-Laubach, Voigt und besonders für die beständige freundliche Leitung und Förderung meiner Studien Herrn H. A. Schwarz zu dauerndem, aufrichtigem Danke verpflichtet.

## Figuren-Tafel.



Der Bereich $S$.

Der Bereich $\Sigma_n$.

Der Bereich $S_8$.

gez. v. F. Bohnert.


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA.

